TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 3 poäng

OBS! Ange namn, personnummer, kurskod samt linje och inskrivningsår.

---

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand. Ge definitionen av Greenfunktion $G(x,y)$ av Dirichletproblemet i D. Beskriv egenskaper av $G(x,y)$. Hur löser man Dirichletproblemet med hjälp av Greenfunktionen? Med hjälp av maximumprincipen bevisa att $G(x,y) > 0$ för $x, y \in D$. Om $D' \subset D$, strängt inne i D, är ett område med glatt rand och $G'(x,y)$ är Greenfunktionen av Dirichletproblemet i D', visa att $G'(x,y) < G(x,y)$ för $x, y \in D', x \neq y$. (11p)

2. Lös randvärdeproblemet $u_{tt} = u_{xx}$, $t > 0, x > 0$ med bivillkor $u|_{x=0,t>0} = t$, $u|_{t=0,x\geq 0} = 0$, $u_t|_{t=0,x\geq 0} = \cos(x)$. (7p)

3. Ge definitionen till ekvationen av elliptiska typ. Bestäm för vilka reella α är ekvationen

$$L(u) \equiv -u_{xy} - 2\alpha u_{xx} + 3\alpha^2 u_{yy} - \alpha u_y + u_x = 0 \tag{1}$$

elliptisk. För sådana α transformera ekvationen (1) till kanoniska formen. (Först transformera ekvationen till formen $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + pu_\xi + qu_\eta = 0$ och efter detta ta $u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{a\xi+b\eta}$ och anpassa a, b så att första derivator försvinner) Med hjälp av kanoniska formen hitta formeln för lösningen till paraboliska ekvationen $u_t(x,y,t) - L(u(x,y,t)) = 0, t \geq 0$ med Cauchydata $u(x,y,0) = \phi(x,y)$ (10p)

4. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^3$ med glatta randen. Antag att $u(x,t) \in C^2(D \times [0,T])$ är en reel lösningen till vågekvationen $u_{tt} = \Delta u$ i $D \times [0,T]$ som uppfyller randvillkoren $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D\times[0,T]} = 0$, där ν betecknar utåtriktade normal till randen ∂D. Visa att

$$\int_D (u_t(x,0)^2 + |\nabla_x u(x,0)|^2)dx = \int_D (u_t(x,T)^2 + |\nabla_x u(x,T)|^2)dx$$

och ge en fysikalisk tolkning. Hur ändras resultatet för den ohomogena vågekvationen $u_{tt} = \Delta u + F(t,x)$? (7p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och FEM för dem. (9p)

6. Berätta så mycket som du kan om Duhamelformler och deras tillämpningar (6p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 20. apr. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 16.apr. Ev. granskning tisdaged, den 23.apr., 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum