(1)

TMA 690. Partiella Differentialekvationer F3. Tenta 2007-04-12

Lösningar.

1. Greenfunktionen $G(x,y)$ för Dirichletproblem $\Delta u = 0$, $u|_\Gamma = f$, $\Gamma = \partial D$.

Har formen $G(x,y) = G_0(x,y) + g(x,y)$

där $G_0(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|}$, $d=2$

och $G_0(x,y) = \frac{1}{\omega_d} |x-y|^{2-d}$, $d>2$,

och $g(x,y)$ är för fixerade ~~y~~ en harmonisk funktion av ~~y~~ x variabel för $x \in D$ ~~$x \neq y$~~ och $g(x,y) = -G_0(x,y)$, $x \in \partial D$.

Funktionen $G(x,y)$ är alltså harmonisk för $x \neq y$. När $x \to y$, så går $G(x,y)$ mot $+\infty$, därför att G_0 går mot $+\infty$ och g är begränsad. Låt δ vara sådan att $G(x,y) > 0$ för $|x-y| < \delta$. Vi betraktar området ~~$D_\delta = D$ med~~ cirk $D_\delta = D \setminus B(y,\delta)$, d.v.s. området D med en liten cirkel (ball) med radie δ och centrum i y borttagen. Funktionen G är harmonisk i D_δ, positiv på randen av $B(y,\delta)$ och lika med 0, d.v.s. icke-negativ på randen av D. Nu, enligt maximumprincipen, har G sitt

minsta värdet i D_δ ~~inne i~~ på randen av D_δ,
det minsta värdet är alltså
icke-negativt, därför är G
positivt inne i D_δ. G är också
positivt i bollen B_δ. Därför är
G positivt överallt inne i D.
Om D_1 är ett annat område
som ligger inne i D och $G_1 = G_0 + g_1$
är Greenfunktionen i D_1,
så betraktar vi skillnaden

$$F = G - G_1 \quad i \quad D_1$$

Vi har $F = G - G_1 = (G_0 + g) - (G_0 + g_1)$
$= g - g_1$. Både funktioner g, g_1
är harmoniska i D_1, därför är
F harmonisk i D_1. På randen av D_1
är G_1 lika med 0 och G är positivt
enligt del 1. Därför är F positivt
på randen. Enligt maximumprincipen
är F positivt överallt i D_1.

2. Vi löser randvärdeproblemet

$u_{tt} = u_{xx}$, $t > 0, x > 0$ med bivillkor

$u|_{x=0, t>0} = t$; $u|_{t=0, x\geq 0} = 0$; $u_t|_{t=0, x\geq 0} = \cos x$.

Vi får inte använda d'Alembert formel för lösningen därför att vi har ett felt område: en kvart i stället av halvplan. Men d'Alembert metoden ger allmäna lösningen på formen

$$u(x,t) = \varphi(x-t) + \psi(x+t)$$

med några funktioner φ, ψ, alltså måste vi hitta funktioner φ, ψ ur randvillkoren.

~~För $x \geq 0, t \geq 0$~~

För $t=0, x \geq 0$ har vi

$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = 0$,

Därför $\psi(x) = -\varphi(x)$ för positiva x

[obs: Detta säger ingenting om φ, ψ för negativa x !!]

För $t=0, x \geq 0$, har vi

$u_t(x,0) = -\varphi'(x) + \psi'(x) = \cos x$

Eftersom $\psi(x) = -\varphi(x)$, så

$\psi'(x) = -\varphi'(x)$,

$-2\varphi'(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{2}\cos x$

$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\sin x + C$

$\psi(x) = \frac{1}{2}\sin x - C$, $C = \varphi(0) = -\psi(0)$

Nu måste vi bestämma $\varphi(x)$, $\psi(x)$ för negativa x ur det sista bivillkoret för $x=0$.

Vi har för $x=0$, $t>0$

$$u(0,t)=\varphi(-t)+\psi(t)=t$$

Eftersom $t>0$, är $\psi(t)$ definierat, $\psi(t)=\frac{1}{2}\sin t - C$

så har vi

$$\varphi(-t)=t-\frac{1}{2}\sin t + C \quad \text{för}$$

positiva t. Ersätter $-t$ mot t:

$$\varphi(t)=-t+\frac{1}{2}\sin t + C, \quad t<0.$$

ψ för negativa behöver vi inte därför att sådana värden inte ingår i formeln för lösningen.

Alltså har vi lösningen

$$u(x,t)=\varphi(x-t)+\psi(x-t)$$

$$=\begin{cases} -\frac{1}{2}\sin(x-t)+\frac{1}{2}\sin(x+t), & x+t\geq 0 \\ -(x-t)+\frac{1}{2}\sin(x-t)+\frac{1}{2}\sin(x+t), & x+t<0 \end{cases}$$

3. $L(u) = -u_{xy} - 2\alpha u_{xx} + 3\alpha^2 u_{yy} - \alpha u_y + u_x$.

$A = -2\alpha, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 3\alpha^2$

Ekvationen är elliptisk om $B^2 - AC < 0$,

$\frac{1}{4} + 6\alpha^3 < 0$; $\alpha < \sqrt{1/24}$

För sådana α transformerar vi ekvationen till kanoniska formen. I nya koordinater $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = \varphi_2(x,y)$ bestäms φ_1, φ_2 som reella och imaginära delar av lösningen $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ av ekvationen $A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0$

Löser kvadratekvationen:

$$A\varphi_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})\varphi_y = 0$$

$$-2\alpha\varphi_x + \left(-\frac{1}{2} + i\beta\right)\varphi_y = 0 \qquad (1)$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{1}{4} - 6\alpha^3}$$

Löser ekv. (1) med karakteristikmetoden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2} + i\beta}{-2\alpha} = +\frac{1}{4\alpha} - \frac{i\beta}{2\alpha}$$

$$dy = \left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{i\beta}{-2\alpha}\right)dx$$

$$\cancel{\left(y - \frac{i\beta}{2\alpha}\right)} \quad y - \frac{x}{4\alpha} + \frac{i\beta}{2\alpha}x = C$$

$$\varphi_1 = y - \frac{x}{4\alpha}, \quad \varphi_2 = \frac{\beta}{2\alpha}x$$

Så, nya variabler är $\xi = y - \frac{x}{4\alpha}$; $\eta = \frac{\beta}{2\alpha}x$

Transformerar ekvationen:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \frac{-1}{4\alpha} u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha} u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{1}{16\alpha^2} u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{4\alpha^2} u_{\xi\eta} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} u_{\eta\eta}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

$$u_{xy} = \frac{1}{4\alpha} u_{\xi\xi} + \frac{\beta}{2\alpha} u_{\xi\eta}$$

$$Lu = -u_{xy} + 3\alpha^2 u_{yy} - 2\alpha u_{xx} - \alpha u_y + u_x$$

$$= \frac{-1}{4\alpha} u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{2\alpha} u_{\xi\eta} + 3\alpha^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha \Big\{ \frac{1}{16\alpha^2} u_{\xi\xi} - \frac{\beta}{4\alpha^2} u_{\xi\eta} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} u_{\eta\eta} \Big\}$$

$$-2\alpha u_\xi - \frac{1}{4\alpha} u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha} u_\eta$$

$$= \gamma (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - \left(2\alpha + \frac{1}{4\alpha}\right) u_\xi + \frac{\beta}{2\alpha} u_\eta .$$

$$\gamma = -\frac{1}{4\alpha} + 3\alpha^2 > 0.$$

* Söker $u = e^{p\xi + q\eta} v$ så att termer med första derivator försvinner

$$u_\xi = p e^{p\xi+q\eta} v + e^{p\xi+q\eta} v_\xi$$

$$u_{\xi\xi} = p^2 e^{p\xi+q\eta} v + 2p e^{p\xi+q\eta} v_\xi + e^{p\xi+q\eta} v_{\xi\xi}$$

$$u_\eta = q e^{p\xi+q\eta} v + e^{p\xi+q\eta} v_\eta$$

$$u_{\eta\eta} = q^2 e^{p\xi+q\eta} v + 2q e^{p\xi+q\eta} v_\eta + e^{p\xi+q\eta} v_{\eta\eta}$$

då: $\gamma(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})u_\xi+\frac{\beta}{2\alpha}u_\eta$

$$= e^{p\xi+q\eta}\gamma(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})$$

$$+e^{p\xi+q\eta}\gamma[pv_\xi+qv_\eta]+e^{p\xi+q\eta}\gamma(p^2+q^2)v$$

$$-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})e^{p\xi+q\eta}(v_\xi+pv)$$

$$+\frac{\beta}{2\alpha}e^{p\xi+q\eta}(v_\eta+pv).$$

så, koefficient hos v_ξ är $\gamma p-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})$,
koeff. hos v_η är $\gamma q+\frac{\beta}{2\alpha}$
Vi väljer $p=\frac{1}{\gamma}(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})$, $q=-\frac{1}{\gamma}\frac{\beta}{2\alpha}$,
så försvinner termer med v_ξ, v_η
och $Lu = e^{p\xi+q\eta}\gamma(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})+e^{p\xi+q\eta}hv$
där h är ett tal, $h=\gamma(p^2+q^2)-(2\alpha+\frac{1}{4\alpha})+\frac{\beta}{2\alpha}$.

Nu löser vi ekvationen

$$u_t-Lu=0\ ;\ u|_{t=0}=u_0.$$

Söker lösningen på formen

$$u=e^{p\xi+q\eta}v(\xi,\eta,t):$$

Så transformeras ekvationen till

$$v_t-\gamma(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+hv)=0$$

$$v(\xi,\eta,0)=v_0=e^{-p\xi-q\eta}u_0$$

Ersätter $v(\xi,\eta,t) = e^{h\gamma t} w(\xi,\eta,t)$.

Så satisfierar w ekvationen

$$w_t - \gamma \Delta w = 0, \quad w(\xi,\eta,0) = v_0.$$

Det är värmeekvationen som löses med Poissonformeln och efter detta går vi tillbaka till u.

---

4. Vi beräknar $\frac{\partial}{\partial t}\left(|\nabla_x u(x,t)|^2\right)$

$$= 2\langle \nabla_x u_t, \nabla_x u\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2) = 2u_t u_{tt}.$$

Så $\frac{d}{dt}\int_D \left(|\nabla_x u(x,t)|^2 + u_t^2\right) dx$

$$= 2\int_D \langle \nabla_x u_t, \nabla_x u\rangle\, dx + 2\int_D u_t u_{tt}\, dx$$

$=$ (Greenformel)

$$-2\int_D u_t \cdot \Delta u\, dx + 2\int_D u_t u_{tt}\, dx$$

$$= -2\int_D u_t (\Delta u - u_{tt})\, dx = 0.$$

Därför är $\int_D |\nabla_x u(x,t)|^2 + u_t^2\, dx$ oberoende av t, och har samma värde för $t=0$ och $t=T$. Detta uttrycker lagen om energipreservation.

För ekvationen $u_{tt} - \Delta u = F(x,t)$ ger densamma beräkningar

$$\frac{d}{dt}\left(\int_D \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dx \right)$$

$$= 2 \int_D F(x,t)\, u_t \, dx$$

Ekvationen beskriver svängningar med externa kraften $F(x,t)$.

$$\frac{1}{2} \int_D \left(u_t^2(x,T) + |\nabla u(x,T)|^2 \right) dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_D \left(u_t^2(x,0) + |\nabla u(x,0)|^2 \right) dx$$

$$= \int_0^T \int_D F(x,t)\, u_t \, dx\, dt$$

Den sista ekvation beskriver att ändringen av energi är lika med arbetet av externa kraften.