FEM

Implementation

Fredrik Lindgren [a]

[a] Denna presentation har ärvts inom Matematiska Vetenskaper och har utvecklats bland andra av Christoffer Cromvik och Fredrik Lindgren.

FEM i en dimension

Exempel: Finn $u(x)$ så att

$$-u'' + u = x, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Variationsformulera ($\times v$ & $\int_0^1$):
Hitta $u \in V'$ så att

$$\int_0^1 vx\,dx = \int_0^1 v(-u'' + u)\,dx =$$

$$= v(-u')|_0^1 + \int_0^1 v'u' + vu\,dx, \forall v \in V.$$

FEM, forts.

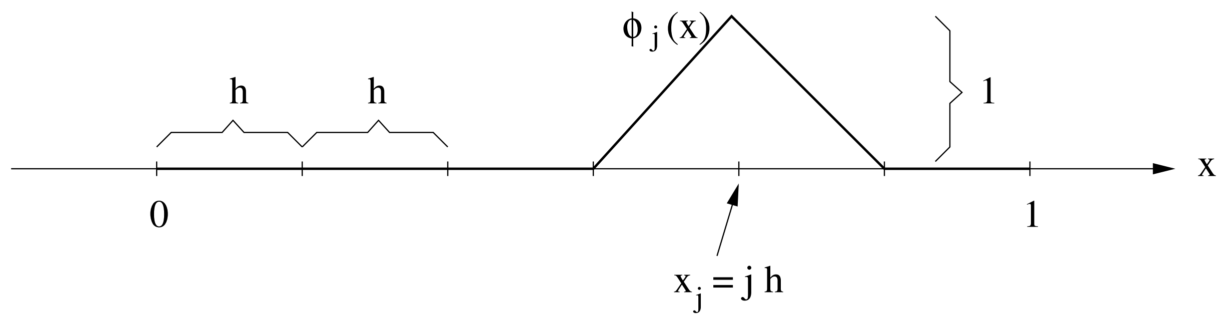
d.v.s.,

$$\underbrace{\int_0^1 v'u' + vu\,dx}_{a(v,u)} = \underbrace{\int_0^1 v f\,dx}_{l(v)} \quad \forall v \in V.$$

FEM, forts.

Diskretisering i finita element

Dela in området $(0, 1)$ i m element/intervall av storlek h:



Sök $U(x) = U_1\,\phi_1(x) + ... + U_m\,\phi_m(x)$, d.v.s., $U_1, .., U_m$ så att

$$\int_0^1 (\phi_j' U' + \phi_j U\, dx) = \int_0^1 \phi_j x\, dx \quad j = 1, .., m.$$

FEM, forts.

Detta resulterar i m ekvationer för de m okända $U_1, .., U_m$ enligt:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{m} U_j \left(\phi_j' \phi_1' + \phi_j \phi_1\right) \, dx =$$

$$= U_1 \underbrace{\int_0^1 \phi_j' \phi_1' + \phi_j \phi_1 \, dx}_{a_{j1}} + U_2 \underbrace{\int_0^1 ..}_{a_{j2}} + .. \quad = \underbrace{\int_0^1 \phi_j(x) x \, dx}_{b_j},$$

d.v.s,

FEM, forts.

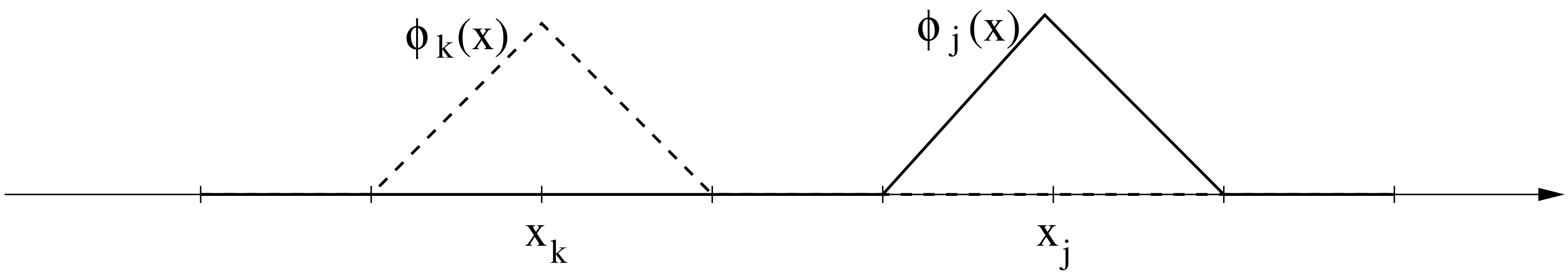
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{j1} & . & a_{jm} \\ . & . & . \\ a_{m1} & . & a_{mm} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_m \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}}_{b} \Leftrightarrow U = A^{-1}b,$$

där

FEM, forts.

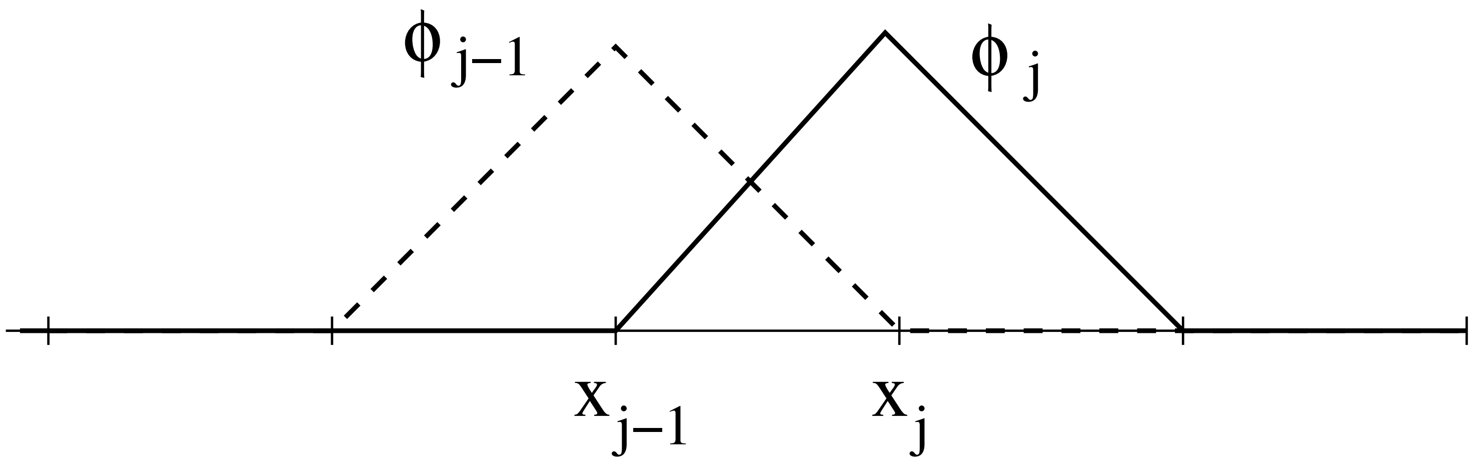
$$a_{jk} = \int_0^1 \phi_j' \phi_k' + \phi_j \phi_k \, dx.$$

Notera att A är *gles*, eftersom



FEM, forts.

För $k = j - 1$ har vi



$$a_{jk} = a_{j,j-1} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \tfrac{1}{h}(-\tfrac{1}{h}) + \tfrac{x-x_{j-1}}{h}\tfrac{x_j-x}{h}\, dx = -\tfrac{1}{h} + \tfrac{1}{6}h,$$
$$b_j = \int_0^1 \phi_j(x)x\, dx = x_j \int_0^1 \phi_j\, dx = h\, x_j, \quad j < m,$$

och så vidare..

FEM, forts.

Vi kan skriva detta som $A = S + M$ där

$$S = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & . & \\ & . & . & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = h\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & . & \\ & . & . & \\ 0 & & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$b = h^2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ m-1 \\ m \end{bmatrix}$$

FEM, forts.

Finita element i rum och tid

Låt oss betrakta värmeledningsekvationen

$$\dot{u} - u'' = f, \quad u'(0,t) = 0,\, u'(1,t) = 0,\, u(x,0) = u_0(x),$$

Variationsformuleringen är nu:
Hitta $u \in V'$

$$\int_{I_n}\int_0^1 v\dot{u}\,dxdt + \int_{I_n}\int_0^1 v'u'\,dxdt = \int_{I_n}\int_0^1 vf\,dxdt \quad \forall v \in V.$$

FEM, forts.

Vi gör ansatsen

$$U(x,t) = U_{n-1}\,\psi_{n-1}(t) + U_n(x)\,\psi_n(t)$$

där

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{k} & t_{n-1} < t \leq t_n \\ \frac{t_{n+1}-t}{k} & t_n < t \leq t_{n+1} \\ 0 & t \notin (t_{n-1}, t_{n+1}] \end{cases}$$

och

$$U_n(x) = U_{n,1}\,\phi_1(x) + U_{n,2}\,\phi_2(x) + \ldots + U_{n,m}\,\phi_m(x) = U(t_n, x),$$

d.v.s., $U(x,t)$ är styckvis linjär och kontinuerlig i rum och tid.

FEM, forts.

Alltså:

- $V' = \{$Kont. & styckvis linjära funktioner i rum och tid.$\}$
- $V =$
  $\{$Kont. & styckvis linjära i rum *men* styckvis konst. i tid.$\}$

Nodvärdena $U_{n,k}$ bestäms således av

$$\int_{I_n} \int_0^1 \phi_j \underbrace{\frac{U_n - U_{n-1}}{k}}_{\dot{U}} \, dx dt + \int_{I_n} \int_0^1 \phi_j' \underbrace{(U_{n-1}' \psi_{n-1} + U_n' \psi_n)}_{U'} \, dx dt$$

$$= \int_{I_n} \int_0^1 \phi_j f \, dx dt, \quad j = 1, .., m,$$

d.v.s.,

FEM, forts.

$$\underbrace{\int_0^1 \phi_j U_n \, dx}_{M\,U_n} - \underbrace{\int_0^1 \phi_j U_{n-1} \, dx}_{M\,U_{n-1}} + \underbrace{\int_{I_n} \psi_{n-1}}_{\frac{k}{2}} \underbrace{\int_0^1 \phi_j' U_{n-1}' \, dx}_{S\,U_{n-1}} \, dt +$$

$$+ \underbrace{\int_{I_n} \psi_n}_{\frac{k}{2}} \underbrace{\int_0^1 \phi_j' U_n' \, dx}_{S\,U_n} \, dt = \underbrace{\int_{I_n} \int_0^1 \phi_j f \, dx dt}_{F_n},$$

FEM, forts.

alltså

$$(M + \frac{k}{2}\,S)\,U_n = (M - \frac{k}{2}\,S)\,U_{n-1} + k\,F_n,$$

av vilket vi successivt kan beräkna $U_n = \begin{bmatrix} U_{n,1} \\ . \\ U_{n,m} \end{bmatrix}$ från U_{n-1}

och F_n.

Tidsstegningsmetoden kallas **Crank-Nicolson**.

En annan metod, **Bakåt Euler**, ger ekvationen
$(M + k\,S\,)\,U_n = M\,U_{n-1} + k\,F_n$.

Assemblering.

Assemblering

Betrakta problemet

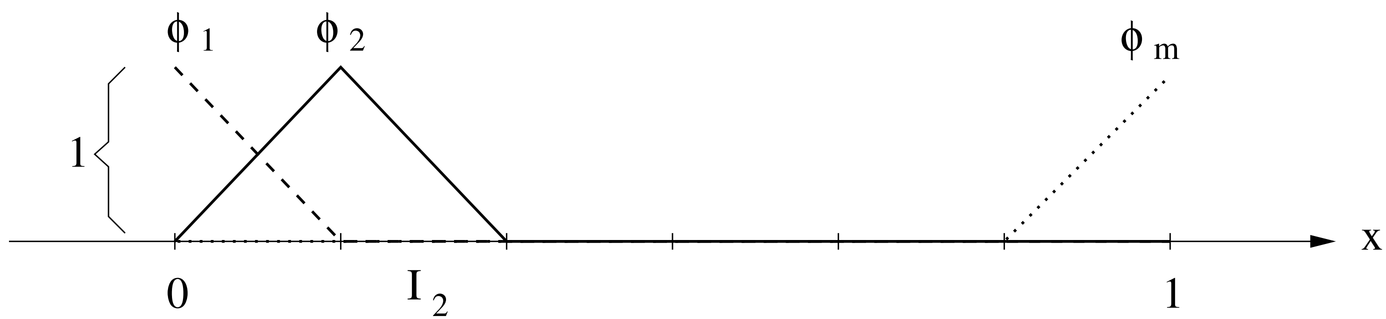
$$-u'' + u = f, \quad 0 < x < 1, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

med variatationsformuleringn: Hitta $u \in V'$ så att

$$\int_0^1 v'u' + vu\,dx = \int_0^1 vf\,dx, \quad \forall v \in V.$$

Assemblering, forts.

Med ansatsen $U(x) = U_1\,\phi_1(x) + .. + U_m\,\phi_m(x)$



och byte u mot U, v mot ϕ_j, får vi får $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ . \\ U_m \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{(S+M)}_{:=A}\,U = b,$$

där

Assemblering, forts.

$$S = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \int_0^1 \phi'_j \phi'_k & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \end{bmatrix} & \leftarrow \text{rad } j \\ \underbrace{\qquad}_{\text{kol } k} & \end{array}$$

och motsvarande för M och b.

Notera att

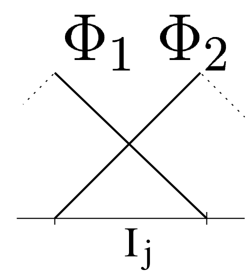
Assemblering, forts.

$$
S = \begin{bmatrix}
\int_1 & \int_1 & 0 & & 0 \\
\int_1 & \int_1 + \int_2 & \int_2 & 0 & \\
0 & \int_2 & \int_2 + \int_3 & \int_3 & \\
 & 0 & \int_3 & \int_3 + \int_4 & \\
 & & & & \\
0 & & & &
\end{bmatrix}
$$

Local stiffness matrix

$$\int_j = \int_{I_j}$$

$$\int_3 \Phi_1' \Phi_2'$$



med lokal styvhetsmatris dS definierad enligt

Assemblering, forts.

$$dS_3 = \begin{bmatrix} \int_{I_3} \phi_3'\phi_3'\,dx & \int_{I_3} \phi_3'\phi_4'\,dx \\ \int_{I_3} \phi_4'\phi_3'\,dx & \int_{I_3} \phi_4'\phi_4'\,dx \end{bmatrix}$$

Assemblering, forts.

Leder till *assembleringsalgoritm* enligt:

```
for el = 1 : m-1
  dS(el) = ...
  addera dS(el) till S
end
```

Liknande för M och b.

Beräkning av dS(el)

Datastrukturer för nodkoordinater och element-nod koppling:

$$p = [\ 0.0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1.0\ ]$$

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

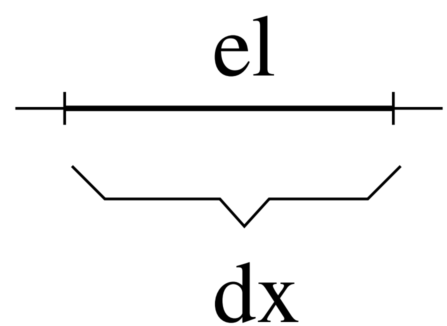
I kolumnerna i p finns koordinaterna för olika noder. Kolumnerna i t ger nodnummer till olika element. Till exempel, element 4 har noder 4 och 5. Koordinaterna till dessa är $p(4) = p(t(1,4))$ och $p(5) = p(t(2,4))$. I allmänhet ges koordinaterna för element el av

$$x = p(t(:,el)).$$

Beräkning av dS(el), forts.

Integralerna i $dS(el)$ ges av elementarean

$$dx = x(2) - x(1) = p(t(2, el)) - p(t(1, el)).$$



tillsammans med derivatorna får de lokala basfunktionerna Φ_1 och Φ_2, d.v.s.

$$DPhi = [-1/dx, 1/dx].$$

Beräkning av dS(el), forts.

$$dS(el) = DPhi^\top * DPhi * dx =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/dx \\ 1/dx \end{bmatrix} [-1/dx \; 1/dx] \, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \frac{1}{dx}.$$

De motsvarande integralerna i $dM(el)$ och $db(el)$ måste beräknas med lämpliga kvadraturregler, till exempel mittpunktsregeln.

Addera dS(el) till S

De rad- och kolonnindex i S som får bidrag av $dS = dS(el)$ ges av $t(:, el)$, d.v.s., S kan uppdateras med bidrag från element el enligt

$$S(r, k) = S(r, k) + dS(el),$$

där $r = k = t(:, el)$. Till exempel, för element $el = 3$, d.v.s. I_3, har vi $t(:, el) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, och $dS(el)$ adderas till $\begin{bmatrix} S_{33} & S_{34} \\ S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}$ i S.

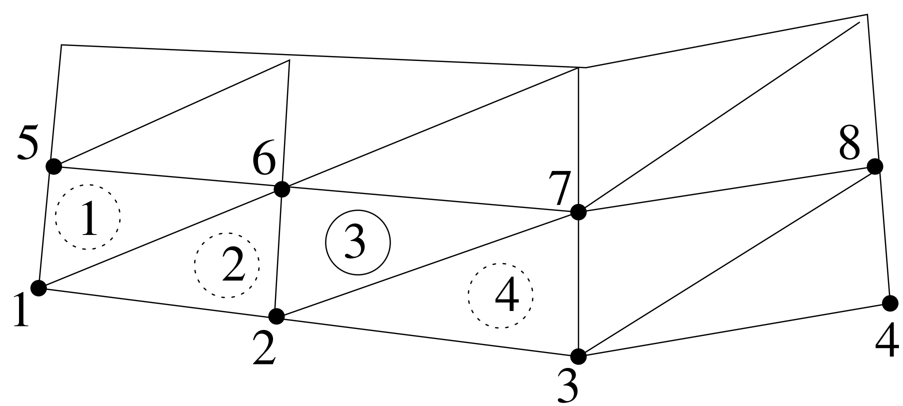
2D-assemblering

Betrakta problemet

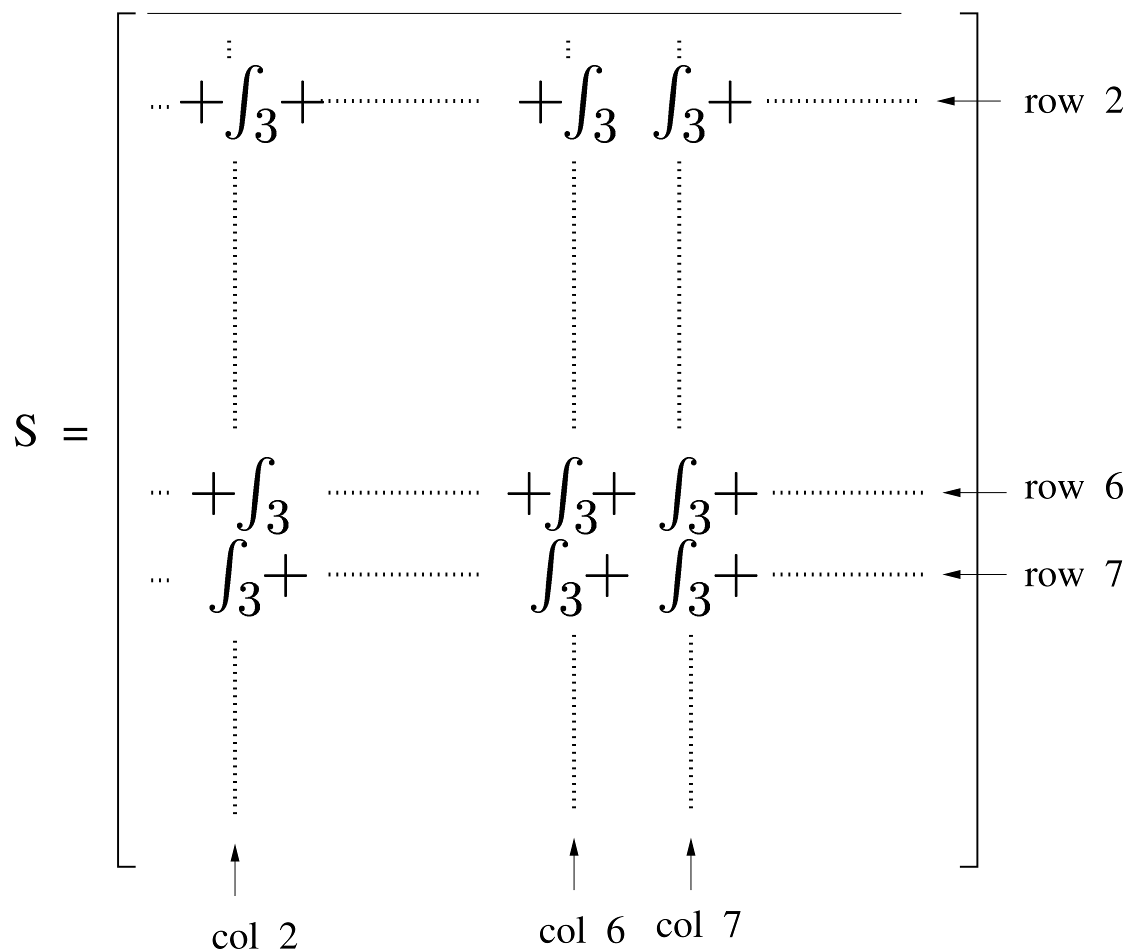
$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_n u = 0, \quad \text{on } \partial\Omega,$$

med variationsformuleringen: Hitta $u \in V'$ så att

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS}_{=0} + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in V$$



2D-assemblering

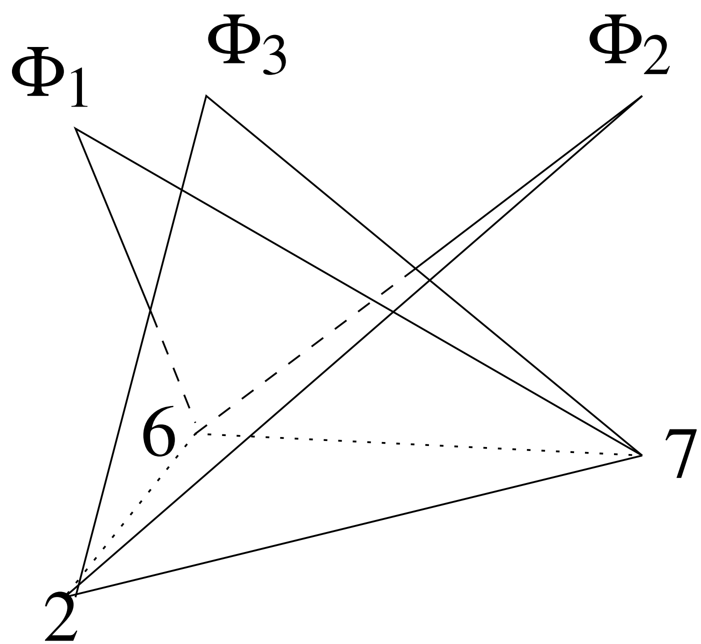


med lokala styvhetsmatrisen

2D-assemblering

$$dS_3 = \begin{bmatrix} \int_{K_3} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_1 & \int_{K_3} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2 & \int_{K_3} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_3 \\ \int_{K_3} \nabla\Phi_2 \cdot \nabla\Phi_1 & \int_{K_3} \nabla\Phi_2 \cdot \nabla\Phi_2 & \int_{K_3} .. \\ \int_{K_3} \nabla\Phi_3 \cdot \nabla\Phi_1 & \int_{K_3} .. & \int_{K_3} .. \end{bmatrix}$$

där



2D-assemblering

Motsvarande datastrukturer för p och t är nu

$$
\begin{array}{l}
p = \left[\begin{array}{cccccc} . & p(1,2) & . \quad . & p(1,6) & p(1,7) & . \\ . & p(2,2) & . \quad . & p(2,6) & p(2,7) & . \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow x_1 - \text{ccords} \\ \leftarrow x_2 - \text{ccords} \end{array} \\
t = \left[\begin{array}{ccccc} . & . & 2 & . & .. \\ . & . & 7 & . & .. \\ . & . & 6 & . & .. \end{array} \right]
\end{array}
$$

där *element* 3 har *noder* 2, 7 och 6, med x_1 och x_2 *koordinater* som finns i p.
Notera att numreringen 2, 7, 6 definierar en *lokal nodnumrering* av noderna som motsvarar de lokala basfunktionerna Φ_1, Φ_2 och Φ_3 som i figuren.

2D-assemblering

Elementlängden dx är nu elementarean dx, och basfunktionens derivatavektor är istället basfunktionens gradientmatris

$$DPhi = [\nabla\Phi_1 \quad \nabla\Phi_2 \quad \nabla\Phi_3], \quad \text{där } \nabla\Phi_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

medan beräkningen av $dS(el)$ och additionen av dS till S ser ut som innan.

Ickelinjära problem

Exempel

$$-\text{div}(a(u)\,\text{grad}u) = f \quad \text{i } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där $a(u)$ är en temperaturberoende värmekonduktivitet.
Variationsformulering för problemet är:
Hitta $u \in V'$ så att

$$\int_\Omega \nabla v \cdot a(u) \nabla u \, dx = \int_\Omega v f \, dx \quad \forall v \text{ med } v = 0 \text{ på } \partial\Omega.$$

Finita elementmetoden använder ansatsen
$U(x) = U_1\,\phi_1 + .. + U_m\,\phi_m$ som bestäms av

Diskreta ickelinjära problemet

$$\int_\Omega \nabla\phi_j \cdot a(U)\nabla U\,dx = \int_\Omega \phi_j f\,dx, \quad j = 1,..,m,$$

där $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ . \\ . \\ U_m \end{bmatrix}$. Notera att detta nu är ett *ickelinjärt* ekvationssystem, som inte kan skrivas $AU = b$, med en given matris A. Istället,

$$A(U)\,U = b,$$

där

Diskreta ickelinjära problemet, forts.

$$A(U) = \begin{bmatrix} \int_\Omega \nabla\phi_1 \cdot a(U)\nabla\phi_1 & \dots & \int_\Omega \nabla\phi_1 \cdot a(U)\nabla\phi_m \\ .. & \dots & .. \\ \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot a(U)\nabla\phi_1 & \dots & \int_\Omega \nabla\phi_m \cdot a(U)\nabla\phi_m \end{bmatrix}.$$

Fixpunktsiteration

Den enklaste metoden för iterativ lösning av det ickelinjära ekvationssystemet för U är

$$A(U^{(j)})\,U^{(j+1)} = b,$$

som ger en följd $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$,.., med $U^{(j)} \to U$ om vi har tur.

Ett alternativ är att använda Newtons metod.

Projekt

Projekt med FEM.

- Frivilligt. Kan ge upp till 5 bonuspoäng till tentan.
- Arbeta i grupper om två.
- Lös partiell differentialekvation i 2D.
- Matlab.
- Kortare skriftlig rapport med programkod.

Projekt, forts.

Tre projekt. Egna (goda) förslag är ok om ni först kollar med handledaren.

- Värmeledning i en slang.
- Egenvärdesproblem.
- Vattenrörelse i ett badkar.

Uppgiftsbeskrivning finns på kurshemsidan.