ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

1. Нет. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** Первый. **8.** Второй. **9.** Первый. **10.** Первый. **11.** Второй. **12.** Второй. **13.** Нелинейное. **14.** Квазилинейное. **15.** Линейное, неоднородное. **16.** Линейное, однородное. **17.** Линейное, неоднородное. **18.** Нелинейное. **19.** Линейное, неоднородное при $h(x, y) \not\equiv 0$. **20.** Квазилинейное. **21.** Квазилинейное. **22.** Квазилинейное. **23.** Квазилинейное (линейное относительно старших производных). **24.** Линейное, однородное. **25.** Гиперболический. **26.** Эллиптический. **27.** Параболический.

28. Параболический. Действительно, соответствующая этому уравнению форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 6\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 10\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3 = \\ = \frac{1}{4}(4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3)^2 - \frac{1}{4}(\lambda_2 + 7\lambda_3)^2$$

в результате неособой замены переменных

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{3}{2}\xi_2 + 4\xi_3, \quad \lambda_2 = 2\xi_2 - 7\xi_3, \quad \lambda_3 = \xi_3$$

приводится к каноническому виду $K(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - \xi_2^2$, откуда и следует справедливость утверждения. **29.** Гиперболический. **30.** Эллиптический, так как соответствующая характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2$$

положительно определена. В этом случае и в задачах **33**, **35** можно пользоваться критерием Сильвестра положительной определенности симметричной квадратичной формы

$$Q = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + 2a_{13}\lambda_1\lambda_3 + a_{22}\lambda_2^2 + 2a_{23}\lambda_2\lambda_3 + a_{33}\lambda_3^2,$$

что заключается в положительности всех главных диагональных миноров

$$A_{11} = a_{11}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

матрицы $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix}$.

31. Гиперболический. Соответствующая характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \\ = (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2$$

в результате неособой замены

$$\lambda_1=\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2+\frac{3}{2}\mu_3,\quad \lambda_2=\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3),\quad \lambda_3=\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_3)$$

приводится к каноническому виду $K(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=\mu_1^2+\mu_2^2-\mu_3^2$. **32.** Гиперболический, так как характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{4}(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)^2-\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)^2-\lambda_3^2$$

в результате замены

$$\lambda_1=\mu_1+\mu_2-\mu_3,\quad \lambda_2=\mu_1-\mu_2-\mu_3,\quad \lambda_3=\mu_3$$

приводится к каноническому виду $K(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=\mu_1^2-\mu_2^2-\mu_3^2$. **33.** Эллиптический. **34.** Гиперболический. Неособой заменой $\lambda_1=\mu_1-\mu_2-\mu_3$, $\lambda_2=\mu_2+\mu_3$, $\lambda_3=\mu_3$ соответствующая характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2-2\lambda_2\lambda_3=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\lambda_2-\lambda_3)^2-\lambda_3^2$$

приводится к каноническому виду $K(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=\mu_1^2+\mu_2^2-\mu_3^2$. **35.** Эллиптический. **36.** Параболический при $y=0$; гиперболический при $y<0$; эллиптический при $y>0$. **37.** Параболический при $x=0$, $y\neq 0$ и при $y=0$, $x\neq 0$; гиперболический при $\operatorname{sign} x\neq \operatorname{sign} y$; эллиптический при $\operatorname{sign} x=\operatorname{sign} y$. **38.** Гиперболический. **39.** Эллиптический вдоль $u=x^2+y^2$; гиперболический вдоль $u=2\sqrt{2}xy$. **40.** Эллиптический вдоль $u=(x+y)^2$; гиперболический вдоль $u=x$; параболический вдоль $u=x^2+\frac{1}{4}y^2+\frac{17}{16}xy$. **41.** Параболический вдоль $u=2y^2$; эллиптический вдоль $u=5xy$; гиперболический вдоль $u=x$. **42.** Параболический вдоль $u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$; гиперболический вдоль $u=2y^2$. **43.** Гиперболический. **44.** Гиперболический. **45.** Гиперболический. **46.** Эллиптический. **47.** Гиперболический вдоль $u=\frac{1}{2}(x+y)^2$; параболический вдоль $u=\sqrt{3}x^2$. **48.** Эллиптический. **49.** Параболический. **50.** Вдоль решения $u=x^2-y^2$ уравнение не принадлежит ни к одному из названных трех типов, так как $K(\lambda_1, \lambda_2)=0$; вдоль $u=x$ уравнение эллиптического типа.

51. Гиперболическое эллиптическое или параболическое, если выражение $\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\frac{\partial F}{\partial u_{yy}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right)^2$ соответственно меньше, больше или равно нулю.

52. Эллиптический. **53.** Гиперболический. **54.** Параболический. **55.** Гиперболический. **56.** Гиперболический. **57.** Эллиптический. **58.** Параболический. **59.** Эллиптический. **60.** Параболический. **61.** Гиперболический. **62.** Гиперболический. **63.** Гиперболический. **64.** Параболический.

65. Гиперболический при $k<0$; параболический при $k=0$; эллиптический при $k>0$. **66.** Гиперболический при $-0{,}5<k<0{,}5$; параболический при $k=\pm 0{,}5$; эллиптический при $|k|>0{,}5$. **67.** Параболический при $k=0$ и при $k=4$; эллиптический при $0<k<4$; гиперболический при $k<0$ и при $k>4$.

68. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-8v=0,\quad \xi=y-x,\quad \eta=2x.$$

69. Параболическое всюду,

$$v_{\eta\eta}+18v_{\xi}+9v_{\eta}-9v=0, \quad \xi=x+y, \quad \eta=x.$$

70. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta}+3v_{\xi}-v_{\eta}+2v=0, \quad \xi=y-x, \quad \eta=2y-x.$$

71. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta}+v_{\xi}-2v_{\eta}+\xi+\eta=0, \quad \xi=2x-y, \quad \eta=x+y.$$

72. Параболическое всюду,

$$27v_{\eta\eta}-105v_{\xi}+30v_{\eta}-150v-2\xi+5\eta=0, \quad \xi=x+3y, \quad \eta=x.$$

73. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+15v_{\xi}-4\sqrt{6}\,v_{\eta}+\frac{1}{3}\xi+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta=0, \quad \xi=y-2x, \quad \eta=\sqrt{6}\,x.$$

74. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-2v_{\xi}+v_{\eta}-v+\eta-\xi=0, \quad \xi=2x-y, \quad \eta=3x.$$

75. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=0, \quad \xi=y, \quad \eta=\operatorname{arctg} x.$$

76. Параболическое всюду, кроме начала координат (в начале координат уравнение вырождается),

$$v_{\eta\eta}-\frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}v_{\xi}+\frac{1}{2\eta}v_{\eta}=0, \quad \xi=y^2-x^2, \quad \eta=x^2.$$

77. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta}=0, \quad \xi=x+\operatorname{arctg} y, \quad \eta=x-\operatorname{arctg} y.$$

78. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-2v=0, \quad \xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad \eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$$

79. Параболическое всюду, кроме начала координат (в начале координат уравнение вырождается),

$$v_{\eta\eta}+2\frac{\xi^2}{\eta^3}v_{\xi}+\frac{1}{\eta}e^{\xi}=0, \quad \xi=\frac{y}{x}, \quad \eta=y.$$

80. Параболическое всюду, кроме координатной оси $x=0$ (на оси $x=0$ уравнение вырождается),

$$v_{\eta\eta}+\frac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}v_{\xi}-\frac{1}{\eta}v_{\eta}=0, \quad \xi=x^2+y^2, \quad \eta=x.$$

81. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta}=0, \quad \xi=x+y-\cos x, \quad \eta=-x+y-\cos x.$$

82. Параболическое всюду,

$$v_{\eta\eta}-\frac{\xi}{1+\xi e^{\eta}}v_{\xi}-\eta e^{-2\eta}v=0, \quad \xi=e^{-y}-e^{-x}, \quad \eta=x.$$

83. Параболическое при $x=0$, $u_{xx}=0$; гиперболическое при $x \neq 0$,

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}v_{\xi}=0, \quad \xi=x^2+y, \quad \eta=y.$$

84. Параболическое при $x=0$, $u_{yy}=0$; гиперболическое при $x>0$,

$$v_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}(v_{\xi}-v_{\eta})=0, \quad \xi=y-x+2\sqrt{x}, \quad \eta=y-x-2\sqrt{x};$$

эллиптическое при $x<0$,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}v_{\eta}=0, \quad \xi=y-x, \quad \eta=2\sqrt{-x}.$$

85. Параболическое при $y=0$, $u_{yy}=0$; гиперболическое при $y<0$,

$$v_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}(v_{\xi}+v_{\eta})=0, \quad \xi=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+x, \quad \eta=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}-x;$$

эллиптическое при $y>0$,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}v_{\xi}=0, \quad \xi=\frac{2}{3}y^{3/2}, \quad \eta=x.$$

86. Параболическое при $x=0$, $y \neq 0$, $u_{yy}+\frac{2}{y}(u_x+u_y)=0$ и при $x \neq 0, y=0$, $u_{xx}+\frac{2}{x}(u_x+u_y)=0$ (в начале координат уравнение вырождается); гиперболическое при $x>0$, $y<0$ и при $x<0$, $y>0$, $v_{\xi\eta}-\frac{3}{\xi^2-\eta^2}(\eta v_{\xi}-\xi v_{\eta})=0$ (замена переменных: $\xi=\sqrt{-y}+\sqrt{x}$, $\eta=\sqrt{-y}-\sqrt{x}$ при $x>0$, $y<0$ и $\xi=\sqrt{y}+\sqrt{-x}$, $\eta=\sqrt{y}-\sqrt{-x}$ при $x<0$, $y>0$); эллиптическое при $x>0$, $y>0$ и при $x<0$, $y<0$, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+3\left(\frac{1}{\xi}v_{\xi}+\frac{1}{\eta}v_{\eta}\right)=0$ (замена переменных: $\xi=\sqrt{y}$, $\eta=\sqrt{x}$ при $x>0$, $y>0$ и $\xi=\sqrt{-y}$, $\eta=\sqrt{-x}$ при $x<0$, $y<0$).

87. Параболическое на прямых $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \ldots$; гиперболическое вне прямых $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \ldots$,

$$v_{\xi\eta}+\frac{\xi-\eta}{2[4-(\xi-\eta)^2]}(v_{\xi}-v_{\eta})=0,$$
$$\xi=y+\cos x+\sin x, \quad \eta=y+\cos x-\sin x.$$

88. Параболическое на осях координат $x=0$ и $y=0$, $u_{xx}=0$; гиперболическое при $x>0$, $y<0$ и при $x<0$, $y>0$,

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}[(2\xi-\eta)v_{\xi}-(2\eta-\xi)v_{\eta}]=0$$

(замена переменных: $\xi=-2(-y)^{1/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}$, $\eta=-2(-y)^{1/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}$ при $x>0$, $y<0$ и $\xi=2y^{1/2}+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $\eta=2y^{1/2}-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ при $x<0$, $y>0$); эллиптическое при $x>0$, $y>0$ и при $x<0$, $y<0$, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}v_{\xi}+\frac{1}{3\eta}v_{\eta}=0$

(замена переменных: $\xi=2y^{1/2}$, $\eta=\frac{2}{3}x^{3/2}$ при $x>0$, $y>0$ и $\xi=2(-y)^{1/2}$, $\eta=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ при $x<0$, $y<0$).

89. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-\frac{15}{2}w=0$,

$$\xi=2x+y,\ \eta=x,\ v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-2\eta)=e^{\frac{5\xi+3\eta}{2}}w(\xi,\eta).$$

90. $w_{\eta\eta}-w_{\xi}=0$,

$$\xi=3x+y,\ \eta=x,\ v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-3\eta)=e^{\frac{-\xi+2\eta}{4}}w(\xi,\eta).$$

91. $w_{\xi\eta}+\frac{1}{2}w+\frac{\eta}{2}e^{\frac{\xi}{2}}=0$,

$$\xi=2x+y,\ \eta=x,\ v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-2\eta)=e^{-\xi/2}w(\xi,\eta).$$

92. $w_{\xi\eta}-7w=0$,

$$\xi=2x-y,\ \eta=x,\ v(\xi,\eta)=u(\eta,2\eta-\xi)=e^{-\xi-6\eta}w(\xi,\eta).$$

93. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-\frac{3}{2}w=0$,

$$\xi=2y-x,\ \eta=x,\ v(\xi,\eta)=u\left(\eta,\frac{\xi+\eta}{2}\right)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta).$$

94. $w_{\eta\eta}-2w_{\xi}=0$,

$$\xi=y-x,\ \eta=y+x,\ v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta-\xi}{2},\frac{\eta+\xi}{2}\right)=e^{\frac{15\xi+8\eta}{32}}w(\xi,\eta).$$

95. $w_{\xi\eta}-w=0$,

$$\xi=x-y,\ \eta=x+y,\ v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}\xi}w(\xi,\eta).$$

96. $w_{\xi\eta}+9w+4(\xi-\eta)e^{\xi+\eta}=0$,

$$\xi=y-x,\ \eta=y,\ v(\xi,\eta)=u(\eta-\xi,\eta)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta).$$

97. $w_{\xi\eta}-w+\xi e^{\eta}=0$,

$$\xi=y,\ \eta=x-3y,\ v(\xi,\eta)=u(\eta+3\xi,\xi)=e^{-\eta}w(\xi,\eta).$$

98. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-w=0$,

$$\xi=2x-y,\ \eta=x,\ v(\xi,\eta)=u(\eta,2\eta-\xi)=e^{\xi+\eta}w(\xi,\eta).$$

99. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+2w=0$,

$$\xi=y,\ \eta=4x-2y,\ v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta+2\xi}{4},\xi\right)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta).$$

100. $w_{\xi\xi}+w_{\eta}=0$,

$$\xi=2x-y,\ \eta=x+y,\ v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{3},\frac{2\eta-\xi}{3}\right)=e^{\xi-2\eta}w(\xi,\eta).$$

101. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0$,

$$\xi=x,\ \eta=-x+y,\ \zeta=2x-2y+z.$$

Исходному уравнению соответствует характеристическая квадратичная форма $Q=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2$, которую, пользуясь, например, методом Лагранжа, можно привести к виду $Q=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\lambda_2+2\lambda_3)^2+\lambda_3^2$. Обозначая $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2$, $\mu_2=\lambda_2+2\lambda_3$, $\mu_3=\lambda_3$, получим форму Q в каноническом

виде $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$. Таким образом, невырожденное аффинное преобразование $\lambda_1=\mu_1-\mu_2+2\mu_3$, $\lambda_2=\mu_2-2\mu_3$, $\lambda_3=\mu_3$ с матрицей $M=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ приводит форму Q к каноническому виду $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$.

Матрица невырожденного аффинного преобразования, приводящего исходное дифференциальное уравнение к каноническому виду, является сопряженной к матрице M, т. е. $M^*=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$, а само это преобразование имеет вид

$$\xi=x,\quad \eta=-x+y,\quad \zeta=2x-2y+z.$$

Пользуясь этим преобразованием и обозначая $u(x,y,z)=v(\xi,\eta,\zeta)$, находим:

$$u_{xx}=v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+4v_{\zeta\zeta}-2v_{\xi\eta}+4v_{\xi\zeta}-4v_{\eta\zeta},$$
$$u_{yy}=v_{\eta\eta}+4v_{\zeta\zeta}-4v_{\eta\zeta},\quad u_{zz}=v_{\zeta\zeta},$$
$$u_{xy}=-v_{\eta\eta}-4v_{\zeta\zeta}+v_{\xi\eta}-2v_{\xi\zeta}+4v_{\eta\zeta},\quad u_{yz}=-2v_{\zeta\zeta}+v_{\eta\zeta}.$$

Подставляя найденные выражения для производных в исходное уравнение, получим $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0$.

102. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+3v_\xi+\frac{3}{2}v_\eta-\frac{9}{2}v_\zeta=0,$

$$\xi=x,\quad \eta=\frac{1}{2}(x+y+z),\quad \zeta=-\frac{1}{2}(3x+y-z).$$

103. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+2v_\eta=0,$

$$\xi=x+y,\quad \eta=-x+y,\quad \zeta=-x-y+z.$$

104. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+v=0,$

$$\xi=y+z,\quad \eta=-y+z,\quad \zeta=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{\sqrt{6}}{2}z.$$

105. $v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}-8v=0,$

$$\xi=x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z,\quad \eta=-\frac{1}{2}(y+z),\quad \zeta=\frac{1}{2\sqrt{2}}(y-z).$$

106. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+2v_\xi-\sqrt{2}v_\eta+\sqrt{2}v_\zeta+4v=0,$

$$\xi=x,\quad \eta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(3x-y),\quad \zeta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y-4z).$$

107. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-3v+\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)-2\zeta=0,$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}x,\quad \eta=\frac{3}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}y,\quad \zeta=x+z.$$

108. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+4v=0,$

$$\xi=y+z,\quad \eta=-y-2z,\quad \zeta=x-z.$$

109. $v_{\xi\xi}+2v=0,$

$$\xi=x,\quad \eta=-2x+y,\quad \zeta=-x+z.$$

110. $v_{\xi\xi}-2v_\xi=0,$

$$\xi=x,\quad \eta=-2x+y,\quad \zeta=-3x+z.$$