Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Telefon: Magnus Önnheim 0703-088304
2011–12–15 kl. 08.30–12.30

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4,5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Formulera maksimumprincipen för paraboliska ekvationer. Bevisa att randvärdeproblemet $u_t - u_{xx} + e^x u = tx$ för $0 < x < 1$, $t > 0$ med randvillkoren $u(0,t) = -1,\ u(1,t) = 1$ och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 2x - 1$ inte kan ha två olika lösningar. Gör det med två metoder: med hjälp av maksimulmrincipen och med hjälp av multiplikation och integrering. Försök göra detsamma för ekvationen $u_t - u_{xx} + e^x u^3 = tx$ (8p)

2. a. Formulera och bevisa den maksimumprincipen för Laplaceekvationen (medelvärdesatsen betraktas som känd.)
   b.Funktionen $u(x,y)$ satisfierar ekvationen $\Delta u = 1$ i rektangeln $0 < x < 2, 0 < y < 4$ och $u(x,y) = 0$ på randen av rektangeln. Genom att välja en funktion $v(x,y)$ sådan att $\Delta v = -1$ och använda maksimumprincipen till $u+v$, hitta övre och nedre uppskattningar för värden $u(1,1)$, u(1,2).Försök med olika hjälpfunktioner v för att få goda uppskattningar. (9p)

3. Använd d'Alembertmetoden för att hitta allmäna lösningen till **ohomogena** ekvationen $u_{tt} - u_{xx} = \sin x$. Hitta lösningen med Cauchydata $u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0$. Hitta lösningen med Cauchydata $u(x,x) = 0,\ u(x,-x) = \cos x$. (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan och av Fouriertransformation för distributioner. Beräkna Fouriertransformationen, första och andra derivator för distributionen F_f som genereras av den vanliga funktionen $f(x) = 0$, för $x < 0$ eller $x > \pi$;$f(x) = \cos(x),\ 0 \leq x \leq \pi$ (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om generaliserade lösningar och finitelemetmetoden för paraboliska ekvationer. Beskriv stabilitetsproblem. (8p)

6. a) Berätta så mycket som du kan om randelementmetoden för att lösa integralekvationer.
   b) Granska integralekvationen $u(x) = \sin x + \lambda \int_0^\pi u(y)\sin(x+2y)dy$. För vilka λ är ekvationen lösbar? Hitta lösningen för sådana λ (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 22. dec. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 20.dec. Ev. granskning 22.dec, 11-13, i mitt kontor.

GR