Hjälpmedel: INGA
MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Telefon: Peter Helgesson , 0703-088304
2012–04–12 kl. 08.30–12.30

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4.5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand. Ge definitionen av Greenfunktion $G(x, y)$ av Dirichletproblemet i D. Beskriv egenskaper av $G(x, y)$. Hur löser man Dirichletproblemet med hjälp av Greenfunktionen? Med hjälp av Greenfunktionen visa att för varje punkt $x^\circ \in D$ finns en konstant C (kanske, beroende på x°) sådan att $|\nabla u(x^\circ)| \leq C \max_{y \in \partial D} |u(y)|$ för varje funktion u harmonisk i D och kontinuerlig i $\bar{D}$. ∂D betecknar randen. (9p)

2. För vågekvationen $u_{tt} - \Delta u = 0$ i trediminsionella rummet, $x \in \mathbb{R}^3$, söker vi lösningar u vilka endast beror på $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ och t (radiala vågor). Visa att funktionen $u(r, t) = \frac{f(r-t)}{r} + \frac{g(r+t)}{r}$ där f, g är godtyckliga funktioner av en variabel, ger en radialvåg. (För radiala funktioner gäller $\Delta u = u_{rr} + 2r^{-1} u_r$). Hitta lösningen av Cauchyproblemet för ekvationen med data $u(r, 0) = \varphi(r),\ u_t(r, 0) = 0$. För $\varphi(r)$ med kompakt stöd, beskriv på kvalitativ nivå hur sådana radiala vågor sprider sig. Fortsätt $\varphi(r)$ som 0 för negativa r. (9p)

3. Formulera maximumpricipen för värmeekvationen. Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett begränsat område med glatt rand. Bevisa att randvärdeproblemet $u_t - \Delta u - p(x, t)u = F(x, t); u(x, 0) = \phi(x), u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega$ inte kan ha 2 olika lösningar, antigen med maximumprincipen eller med hjälp av multiplicering och integrering. Välj själv vilkoren på funktionen $p(x, t)$ under vilka du kan bevisa detta (max poäng ges för en godtycklig begränsad funktion $p(x, t)$.) (8p)

4. Ge definitionen till en distribution i $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ange motivering för definitionen av derivatan av en distribution och för multiplikation av en distribution med en glatt funktion. Beräkna de följande derivator av distributioner $\frac{d^2}{dx^2}|x|,\ \frac{d}{dx}(\cos(x)\delta(x)),\ \frac{d}{dx}(x\delta''(x)),\ \frac{d}{dx}(|x|\delta(x))$. Hitta derivatan av distributionen $F(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) x^{-1/2} dx$. (9p)

5. Berätta så mycket som du kan om Fredholmsatser och om hur man använder Fredholmsatser för att granska lösbarhet för randvärdeproblem för Laplaceekvation. (8p)

6. Berätta om olika typer av PDE och om metoder för att transformera PDE med 2 oberoende variabler till kanonisk form. (7p)

Betygsgränserna: 3: 20p., 4: 30p., 5: 40p.

Skrivningen beräknas färdigrättas den 17.apr. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida den 19.apr. Ev. granskning, den 19.apr., 13-15, i mitt kontor.

G.Rozenblioum

GR