TMA 690 Partiella differentialekv.

Tenta 2012-04-12

lösningar.

1. Om egenskaper av Greenfunktioner se DC, s. 166.

$$u(x) = -\int_{\partial D} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu(y)}\, dS(y) \quad (1)$$

Funktionen $G(x,y)$ är en harmonisk funktion för $x \neq y$, därför glatt. Man kan för x inne i D termvis derivera formeln (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = -\int_{\partial D} u(y) \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x_k \partial \nu(y)}\, dS(y).$$

Derivatan $\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x_k \partial \nu(y)}$ är begränsad, $\leq C$,

därför $\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\right| \leq C \int_{\partial D} |u(y)|\, dS(y).$

2. Att $u(r,t) = \frac{f(r-t)}{r} + \frac{g(r+t)}{r}$

är lösningen får man med
direkt substitution.
Att lösa Cauchyproblemet:
Sätter in $u(r,t)$ i Cauchyvillkoren

$$\left.\begin{aligned} u(r,0) &= \frac{f(r)}{r} + \frac{g(r)}{r} = \varphi(r) \\ u_t'(r,0) &= -\frac{f'(r)}{r} + \frac{g'(r)}{r} = 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

ur ekvationer (2) hittar f, g.

$$f(r) = g(r) = \frac{r\varphi(r)}{2}$$

lösningen har formen:

$$u(r,t) = \frac{\varphi(r-t)(r-t)}{2r} + \frac{\varphi(r+t)(r+t)}{2r}$$

analys av lösningen.
φ delas i 2 radiala vågor. en av dem
$\frac{\varphi(r+t)(r+t)}{2r}$ går mot centrum,
den andra vågen går från centrum.
Om $\varphi(r)$ är koncentrerad på interva
$a < r < b$, $\varphi = 0$ utanför interva
så ska vågen
$\frac{\varphi(r-t)(r-t)}{2r}$ koncentrerad i interv

$a + t < r < b + t$. $r = a + t$ - framfr
$r = a - t$ - bakfront. för stora r,
$r \sim t$, så kan vi se,
för utgående vågen har man Huygens
princip. amplituden minskar som t

Ingående vågen $\left(\frac{\varphi(r+t)(r+t)}{r}\right)$ har framfront på $r = a-t$, bakfront för $r = b-t$, också Huygens' princip gäller.

---

3. beviset för en begränsad funktion $p(x,t)$, $|p(x,t)| < P_0$.
~~sätt~~ Söker $u(x,t)$ som
$u(x,t) = v(x,t)\, e^{P_0 t}$. Sätter in i ekvationen. för $v(x,t)$ får vi ekvation

$$V_t - \Delta V + (p_0 - p(x,t))V = F(x,t)e^{-P_0 t}$$

med samma rand- och begynnelsevil[kor] som för $u(x,t)$.

Med hjälp av maximumprincipen:

Antar att V_1, V_2 - 2 lösningar. betrakta $V = V_1 - V_2$. Funktionen V satisfieras ~~sätt~~ ekvationen

$$V_t - \Delta V + (P_0 - p(x,t))V = 0 \qquad (3)$$

$$V(x,0) = 0\ ;\ V\big|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

Eftersom $p_0 - p(x,t) > 0$, gäller maximum[principen] - v kan inte ha ~~sin~~ sin positiv max eller negativ min inne i området bara för $x \in \partial\Omega$ eller $t = 0$.
därför $0 \le V(x,t) \le 0$, $V \equiv 0$.

Med integregiag. Multiplicera ekv. (3) med $v(x,t)$ och integrera i Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega (p_0 - p(x,t))v^2 dx$$

den andra och den tredje integral
är icke-negativa, därför

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)^2\,dx \le 0\ ,$$

$\int_\Omega v(x,t)^2\,dx$ minskar, men för t

har vi $\int_\Omega v(x,0)^2\,dx = 0$.

$\Rightarrow \int_\Omega v(x,t)^2\,dx = 0$ för alla t.

---

4. Beräkningar.

$|x|'$: $\quad |x|'(\varphi)$

$$= -|x|(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\,dx - \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx$$

= (partiellintegrering)

$$-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx = \theta(\varphi$$

$|x|' = \theta$

$|x|'' = \theta' = \delta$.

Enligt definitionen

$$\frac{d}{dx}(\cos x\,\delta(x))(\varphi)$$

$$= -(\cos x\,\delta(x))(\varphi')$$

$$= -\delta(x)[\cos x\,\varphi'(x)] = -\cos 0\,\varphi'$$

$$= -\varphi'(0)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x\,\delta''(x))(\varphi)$$

$$= -\frac{d}{dx}(x\,\delta''(x))(\varphi') =$$

$$= x\,\delta''(x)(\varphi'') = \delta''(x\varphi'')$$

$$= -\delta'((x\varphi'')') = \delta((x\varphi'')'')$$

$$= (x\varphi'')''\Big|_{x=0}$$

$$= (x\varphi'''' + 2\varphi''')\Big|_{x=0} = 2\varphi'''(0).$$

$$F(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^{-1/2}\, dx$$

$$F'(\varphi) = -F(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= -\int_0^1 \varphi'(x)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx - \int_1^\infty \varphi'(x)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= -\int_0^1 (\varphi(x)-\varphi(0))'\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \frac{2}{3}\int_1^\infty \varphi(x)\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx + \varphi(1)$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (\varphi(x)-\varphi(0))\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx + \frac{2}{3}\int_1^\infty \varphi(x)\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx$$

$$+ \varphi(0)\cdot\frac{2}{3} + \varphi(1) - \varphi(1).$$