

**TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4.5 p.**

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Låt  $D$  vara ett begränsat område in  $\mathbb{R}^d$  med en glatt rand  $\Gamma$ . Bevisa att det inte finns någon glatt reell lösning till randvärdeproblem  $\Delta u + |x|^2 + 1 = 0$  med randvillkoren  $\partial u / \partial \nu = u^2$ . Använd en av Greenformler. Hitta randvillkoren för vilka lösningen kan finnas. (6p)
2. Berätta om klassificering av adraordningens PDE med 2 och flera oberoende variabler. Avgör vilken typ som ekvationen  $\alpha^2 u_{tt} + u_{tx} - u_{xx} = 0$  tillhör beroende på den reella parametern  $\alpha$ . För vilka  $\alpha$  Cauchyproblemet för ekvationen med Cauchydata  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  har bara en lösning? Använd d'Alembertmetoden för att hitta allmänna lösningen till **ohomogena** ekvationen  $u_{tt} - u_{xx} = x^2$ . (10p)
3. Formulera den svaga maximumprincipen för paraboliska ekvationer. Förklara fysikaliska tolkningen. Med hjälp av den principen visa att randvärdeproblemet  $u_t - \Delta u + u^3 = F(x, t)$  för  $x \in D \subset \mathbb{R}^d$  ( $D$  är ett begränsat område med randen  $\partial D$ ),  $t \in (0, T)$ ,  $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ ,  $u(x, t) = g(x, t)$  för  $x \in \partial D$ , inte kan ha fler än en lösning. (8p)
4. Ge motivering för definition av derivatan av en distribution och av Fouriertransformation av distributioner. Hitta derivator och andraderivator av distributioner:  $\sin^2 x \delta'$ ,  $|x|^{1/2}$ . Hitta Fouriertransformation av distributioner  $x^2$ ,  $|x|$  (8p)
5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (10p)
6. Berätta om randelementmetoder för att lösa randvärdeproblem för Laplaceekvationer. (9p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 8. sept. Ev. granskning måndagen, den 13.sept. kl. 11.00-13.00 i mitt kontor. G.Rozenblioum

GR