TMA690 - Partiella Differentialekvationer

2009-04-17

Lösningar.

1. Karakteristiska ekvationen:

$$dy^2 + 2\sin x\, dy\, dx - \cos^2 x\, dx^2 = 0$$

allmäna lösningar

$$y = \cos x \pm x = c$$

Variabelbytet:

$$\xi = y - \cos x - x$$
$$\eta = y - \cos x + x$$

Efter variabelbytet kommer till:

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Allmäna lösningen:

$$u = f(y - \cos x - x) + g(y - \cos x + x).$$

2. Fundamentala lösningen till ekvationen $Lu=0$ är funktion:

$$L\Phi(x) = \delta(x)$$

Se: Folland, s. 350

Ekvationen $Lu=f$ lösas genom $u = f*\Phi$.

$u'+\lambda u=0$: $\Phi = \theta(x)e^{-\lambda x}$

$$\Phi' = \theta' e^{-\lambda x} - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x}$$

$$= \delta - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x}$$

$$\Phi'+\lambda\Phi = \delta - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} + \lambda\theta(x)e^{-\lambda x}$$

$u''+a^2u=0$: $\Phi = \theta(x)\frac{\sin ax}{a}$

$$\Phi' = \theta'\frac{\sin ax}{a} + \theta\cos ax$$

$$= \theta\cos ax$$

$$\Phi'' = \theta'\cos ax - a\theta\sin ax$$

$$= \delta - a\theta\sin ax$$

$$\Phi''+a^2\Phi = \delta.$$

3: Berättades på föreläsningar.

4. antar att det finns 2 reella lösningar u_1, u_2.

$u = u_1 - u_2$ satisfierar

$$u_t = \Delta u - (u_1^3 - u_2^3)$$

$$\Rightarrow u_t = \Delta u - u(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)$$

$p = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2$ är alltid positivt.

multipl med u och integrera

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D u^2(x,t)\,dx = -\int_D |\nabla u|^2 dx - \underbrace{\int p u^2 dx}_{<0}$$

$$\int_D u^2(x,0)\,dx = 0 \Rightarrow u = 0.$$

$$u_t = \Delta u - u^3.$$

multipl. med u och integrerar

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D u^2(x,t)\,dx = -\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D u^4(x,t)\,dx$$

$$< -\int_D u^4(x,t)\,dt.$$

Med Cauchy-Schwartz:

$$\int_D u^2(x,t)\,dx = \int_D u^2(x,t)\cdot 1\,dx$$

$$\leq \left(\int_D u^4(x,t)\,dt\right)^{1/2} |D|^{1/2}$$

$$\Rightarrow -\int u^4 \leq \left(\int u^2\right)^2 |D|^{-1}$$

Betecunav

$$h(t) = \int_D u^2(x,t)\,dt$$

$$\frac{1}{2} h'(t) \leq -|D|^{-1} h^2(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{h'(t)}{h^2(t)} < -|D|^{-1}$$

$$\frac{h'(t)}{h^2(t)} = -\left(\frac{1}{h(t)}\right)'$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{1}{h(t)}\right)' < -2|D|^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{h(t)}\right)' > 2|D|^{-1}$$

$$h(t)^{-1} = \int_0^t \left(\frac{1}{h(s)}\right)' ds > 2t|D|^{-1}$$

$$h(t) < \left(2t|D|^{-1}\right)^{-1} \to 0.$$

5. Entydighetssatsen:

$u \in C^2(D)$

$\Delta u = 0$, $u|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow u = 0$

Bevis: multiplicera med u och Green 1

$\int |\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = C$

$C = 0$ ur randvillkor.

paradox:

Den givna funktionen $u(x,y)$ satisfierar Laplace i D, randvillkoren, men är inte kontinuerlig i punkten $(x,y) = (0,0)$