MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: INGA
Telefon: Fredrik Lindgren 0703-088304
2009–12–18 kl. 14.00–18.00

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4,5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Låt D vara ett begränsat område i $\mathbb{R}^d$ med glatt rand.

   a) Avgör om det finns en **positiv** glatt lösning till randvärdeproblem $\Delta u - (4u^3 - 4u^2 + u) = 3$ i D, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ på randen av D.

   b) Finns det några **reella** lösningar av ekvationen $\Delta u - (4u^3 - 4u^2 + u) = 0$ med detta randvillkor? Hitta alla, om de finns.

   (7p)

2. Berätta så mycket du kan om beroendeområdet och Huygensprincipen för vågekvationen. Använd d'Alembertmetoden för att hitta allmäna lösningen till **ohomogena** ekvationen $u_{tt} - u_{xx} = A$ där A är en reel konstant. Transformera till kanoniska formen och hitta lösningen till ekvationen $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 2$ med Cauchydata $u(x, 0) = 2x^2 + 5x$, $u_y(x, 0) = 2x + 1$ (9p)

3. Formulera den svaga maximumprincipen för paraboliska ekvationer. Förklara fysikaliska tolkningen. Med hjälp av den principen visa att randvärdeproblemet $u_t - \Delta u + u^5 = F(x, t)$ för $x \in D \subset \mathbb{R}^d$ (D är ett begränsat område med randen Γ), $t \in (0, T)$, $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $u(x, t) = g(x, t)$ för $x \in \partial D$ kan ha inte fler än en lösning. (8p)

4. Ge motivering för definition av derivatan av en distribution och av Fouriertransformation av distributioner. Hitta derivator och andraderivator av distributioner: $\sin x\delta'$, $|x|^{1/2}$. Bestam för vilka n, har man $x^n \delta'' = 0$. Hitta Fouriertransformation av δ' (8p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. (10p)

6. Berätta så mycket du kan om Fredholmteori för integralekvationer. Hitta egenvärden och egenfunktioner för integralkvationen

   $$\int_0^1 xy(x - 2y)u(y)dy = \lambda u(x).$$

   Bestäm för ett av hittade egenvärden λ, för vilka $f(x)$ som ekvationen

   $$\int_0^1 xy(x - 2y)u(y)dy - \lambda u(x) = f(x)$$

   har några lösningar. (8p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 6. jan. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 28.dec. Ev. granskning tisdagen, 19.jan, 11-13, i mitt kontor.

GR