TMA690 PDE F3

2009-12-18

lösningar

1. a. multiplicera ekvationen med $u(x)$ och integrera:

$$\int_D \Delta u \cdot u \, dx - \int_D (4u^3 - 4u^2 + u) \cdot u \, dx = 3\int_D u \, dx$$

> 0

Använder Green 1:

$$-\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D u^2(2u-1)^2 dx > 0$$

omöjligt. Inga positiva lösningar

b. multiplicerar med $u(x)$ och integrerar

$$0 = \int_D \Delta u \cdot u \, dx - \int_D u^2(2u-1)^2 dx$$

$$= -\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D u^2(2u-1)^2 dx$$

Detta är möjligt endast om $u = C$ (konstant)

Konstanten ska satisfiera

$$C^2(2C-1)^2 = 0$$

lösningar: $C = 0$; $C = \frac{1}{2}$.

2. a) $u_{tt} - u_{xx} = A$

$\xi = x - t \; ; \; \eta = x + t$

$u_{tt} - u_{xx} = -4 u_{\xi\eta} = A$

$u_{\xi\eta} = -4^{-1} A$; integrerar:

$u_{\xi} = -4^{-1} A \eta + F(\xi)$

$u = -4^{-1} A \xi \eta + \int F(\xi) d\xi + g(\eta)$

$= -\frac{1}{4} A (x-t)(x+t) + f(x-t) + g(x+t)$

$= -\frac{1}{4} A (x^2 - t^2) + f(x-t) + g(x+t)$

b. Transformation till kanoniska formen;

med hjälp av variabelbytet

$\xi = 5x - y \, , \; \eta = x - y$:

$-8 u_{\xi\eta} = 2 \; ; \; u_{\xi\eta} = -\frac{1}{4}$.

$u(x,y) = f(5x-y) + g(x-y) - \frac{1}{4}(5x-y)(x-y)$.

Cauchydata: $y = 0$:

$$\begin{cases} f(5x) + g(x) - \frac{1}{4} \cdot 5x^2 = 2x^2 + 5x \\ -f'(5x) - g'(x) - \frac{6x}{4} = 2x + 1 \end{cases}$$

därifrån hittar f och g.

3. Antar at det finns två olika lösningar u_1, u_2. Skriver ekvationer för dem, subtraherar, $u = u_1 - u_2$:

$$u_t - \Delta u + (u_1 - u_2) \cdot \frac{u_1^5 - u_2^5}{u_1 - u_2} = 0$$

betecknar $\frac{u_1^5 - u_2^5}{u_1 - u_2}$ som b.

$b \geq 0$ (eftersom $u_1 > u_2 \Leftrightarrow u_1^5 > u_2^5$)

$$u_t - \Delta u + bu = 0$$

$$u\big|_{t=0} = 0; \quad u\big|_{\partial D} = 0$$

Svaga maxprincipen: $u = 0$;

$u_1 = u_2$

4.

$$\langle (\sin x \cdot \delta')', \varphi \rangle$$

$$= - \langle \sin x \cdot \delta', \varphi' \rangle$$

$$= - \langle \delta', \sin x \cdot \varphi' \rangle$$

$$= \langle \delta, (\sin x \cdot \varphi')' \rangle$$

$$\langle \delta, \sin x \cdot \varphi'' + \cos x \cdot \varphi' \rangle$$

$$= \varphi'(0).$$

$$\langle (\sin x \cdot \delta')'', \varphi \rangle =$$

$$- \langle (\sin x \cdot \delta')', \varphi' \rangle$$

$$= - \varphi''(0).$$

$$\langle (|x|^{1/2})', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1/2} \varphi'(x)\,dx$$

part. integrering

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|x|^{1/2})' \varphi(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} |x|^{-\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx$$

$$\langle (|x|^{1/2})'', \varphi \rangle = - \langle (|x|^{1/2})', \varphi' \rangle =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} |x|^{-1/2} \varphi'(x)\,dx - \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \varphi'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} |x|^{-1/2} (\varphi(x) - \varphi(0))'\,dx - \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} (\varphi(x) - \varphi(0))'_a$$

$=$ (part. integrering, som är möjlig eftersom $\varphi(x) - \varphi(0) = O(|x|)$, $x \to 0$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{0} |x|^{-3/2} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{0} x^{-\frac{3}{2}} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx.$$

$$\langle x^n \delta'', \varphi \rangle = \langle \delta'', x^n \varphi(x) \rangle$$

$$= \left[x^n \varphi(x)\right]''_{x=0}$$

$$= n(n-1)x^{n-2}\varphi(\cancel{x})\Big|_{x=0} + 2n\,x^{n-1}\varphi'(x)\Big|_{x=0} + x^n \varphi''(x)\Big|_{x=0}$$

om $n = 2, 3, \dots$ detta är 0

om $n = 0, 1$, $\neq 0$.

$n=0$: $\langle \delta'', \varphi \rangle = \varphi''(0)$

$n=1$ $\langle x\delta'', \varphi \rangle = (x\varphi)''\big|_{x=0} =$

$2\varphi'(0)$.

6. Skriver ekvationen på formen

$$x^2 \int_0^1 y\,u(y)\,dy - x \int_0^1 2y^2 u(y)\,dy = \lambda u(x). \qquad (1)$$

Detta betyder att

$$u(x) = Ax + Bx^2$$

Sätter in i ekvationen (1)

$$x^2 \int_0^1 y\,(Ay + By^2)\,dy - x \int_0^1 2y^2 (Ay + By^2)\,dy$$
$$= \lambda\,(Ax + Bx^2).$$

Beräknar integraler.

$$x^2\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{4}\right) - x\left(\frac{2A}{4} + \frac{2B}{5}\right)$$
$$= \lambda\,(Ax + Bx^2)$$

Jämför koefficienterna före x, x^2

$$\begin{cases} \frac{A}{3} + \frac{B}{4} = \lambda A \\ -\frac{A}{2} - \frac{2B}{5} = \lambda B \end{cases}$$

för att ha icke-triviala lösningar måste λ vara ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

egenvärden hittas ur kvadratekvation

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} - \lambda \end{pmatrix} = 0;$$ hittar 2 egenvärden λ_1, λ_2.

efter detta hittas $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ som egenvektorer av matrisen, vilka motsvarar egenvärden λ_1, λ_2.

Vi får $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$

egenfunktioner för integralekvationen (1) blir

$u_1(x) = A_1 x + B_1 x^2$ med egenvärdet λ_1.

$u_2(x) = A_2 x + B_2 x^2$ med egenvärdet λ_2

På liknande sätt löser egenvärdeproblemet för adjungerande integralekvationen

$$\int_0^1 xy\,(y-2x)\,v(y)\,dy = \lambda v(x).$$

Lösbarhet - ur fredholmsatsen.