TMA 690 PDE F3

2010-08-20 Lösningar

---

1. Använder Green I med u som lösningen och $v=1$. Vi får

$$\int_D \Delta u \cdot v = \int_D \Delta u = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_\Gamma u^2 = \int_D -(|x|^2+1)$$

– omöjligt, därför finns lösningen inte.

Om man tar randvillkoren som satisfierar Green I, så finns lösningen. t. ex.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{|\Gamma|} \int_D (|x|^2+1)$$

---

2. $A = \alpha^2$, $B = 1$, $C = -1$

$B^2 - AC = 1+\alpha^2 > 0$ alltid;

Hyperbolisk typ.

Cauchyproblemet $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ om $\alpha \neq 0$ så hittar man bara en lösning med D'Alembert. Om $\alpha = 0$, så har vi

$$u_{tx} = u_{xx} \quad ; \quad \text{för } t=0,$$

har vi $u_{tx} = \psi_x(x) = u_{xx} = \varphi_{xx}(x)$

Så, lösningen finns endast

om $\psi_x = \varphi_{xx}$. Annars finns inte

Del 2: Sök $u = v - \frac{x^2}{2}$. Då satisfierar v ekvationen $v_t - v_{xx} = 0$. Använd D'Alembert

$u(t,0) = \varphi$

3. Antar att det finns 2 olika lösningar u_1 och u_2

Skriver ekvationen för u_1, u_2 och subtraherar; vi får för $u = u_1 - u_2$:

$$u_t - \Delta u + u(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \; ; \; u(x,t) = 0 \; ; \; x \in \partial D.$$

Koefficienten $u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2$ är alltid ickenegativ, därför $u = u_1 - u_2$ inte kan ha positiva max eller negativa min i $x \in D$ eller $t = T$. Därför ~~kan~~ måste $u = 0$.

4. för $F = |x|^{1/2}$:

$$\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1/2} \varphi'(x)\,dx$$

$$= +\frac{1}{2} \int |x|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x \, \varphi(x)\,dx$$

$$(|x|^{1/2})' = +\frac{1}{2} |x|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x$$

$$\langle F'', \varphi \rangle = \langle F, \varphi'' \rangle \underset{\text{part. int}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{1/2} \varphi''(x)\,dx =$$

$$-\frac{1}{2}\int |x|^{-1/2} \operatorname{sgn} x \, \varphi'(x)\,dx.$$

Man kan inte partiellintegrera en gång till, eftersom kommer till en divergent integral.

Därför delar

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1/2} \operatorname{sgn} x \, \varphi'(x)\, dx =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}\right) |x|^{-1/2} \operatorname{sgn} x \, \varphi'(x)\, dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x \, \varphi'(x)\, dx \quad = I_1 + I_2$$

För första integralen partiellintegrerar,

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{-1} |x|^{-\frac{3}{2}} \varphi(x)\, dx + \frac{1}{2}\varphi(-1)$$

$$-\frac{1}{4}\int_{1}^{\infty} |x|^{-\frac{3}{2}} \varphi(x)\, dx + \frac{1}{2}\varphi(-1)$$

För I_2, för att göra integralerna konvergenta, skriver $\varphi'(x) = (\varphi(x) - \varphi(0))'$ och partiellintegrerar

$$I_2 = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} |x|^{-\frac{3}{2}} (\varphi(x) - \varphi(0)) - \frac{1}{2}(\varphi(1) - \varphi(0))$$

$$-\frac{1}{2}(\varphi(-1) - \varphi(0)).$$

Addera I_1 och I_2 - får uttrycket för derivatan.

Fourier transformation av x^2:

$\langle \hat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \hat{\varphi} \rangle$

$\langle \hat{x}^2, \varphi(\xi) \rangle = \langle x^2, \hat{\varphi}(x) \rangle$

(egenskaper av Fourier)

$= \int x^2 \hat{\varphi}(x)\, dx =$

$= -\varphi''(0) \cdot 2\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\hat{x}^2 = -\delta'' \cdot 2\pi}$$