Hjälpmedel: INGA

MATEMATIK Telefon: Fredrik Lindgren 0703-088304

Chalmers tekniska högskola 2010–12–17 kl. 14.00–18.00

TMA690 Partiella Differentialekvationer F3, 4,5 poäng

OBS! Ange kod, kurskod samt linje.

---

1. Ge definitionen för Greenfunktion $G(x,y)$ i området D för Laplaceekvationen med Dirichlet randvillkor. Beskriv huvudegenskaper av $G(x,y)$. Vilka problem kan man lösa med hjälp av Greenfunktionen och hur? Bevisa att den Greenfunktionen satisfierar olikheten $G(x,y) > 0$ för $x, y \in D, x \neq y$. `Led: Klippa ut en liten boll` B `med centrum i` $x \in D$`, tänka vilken tecken som` $G(x,y)$ `har när` $y \in \partial B$`, och försök använda maximumprincipen till` $G(x,y)$ `som en funktion av` $y \in D \setminus B$`.` (9p)

2. Berätta om klassificering av adraordningens PDE med 2 och flera oberoende variabler. Avgör vilken typ som ekvationen $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u + 4u = 0$ tilhör för $x > 0$. Transformera till kanoniska formen. Formulera maximum principen för den resulterande ekvationen om sådan princip finns . Formulera typiska randvärdeproblem för den resulterande ekvationen. (7p)

3. Formulera Liouvillesatsen för harmoniska funktioner. Låt en harmonisk funktion $u(x,y)$ i planet satisfiera olikheten $u_x + u \geq y + 2$. Hitta alla sådana funktioner $u(x,y)$. Led: på något steg använder man $u_x + u = e^{-x}(e^x u)_x$. (9p)

4. Berätta så mycket du kan om egenskaper av vågspridning i dimension 1,2,3. Lös vågekvationen $u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$ med begynnelsevillkoren $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$ där $\varphi(x) = 1 - |x|,\ |x| \leq 1,\ \varphi(x) = 0, |x| > 1; \psi(x) = 0$. Hitta framfronten och bakfronten för vågen vid tidpunkten $t = 5$. Granska om lösningen har andraderivator. Ifall vanliga andraderivator av lösningen inte finns beräkna dessa derivator som distributioner och visa att distributionsderivator satisfierar vår vågekvation. (9p)

5. Berätta så mycket som du kan om definition av generaliserade lösningar till paraboliska randvärdeproblem och idé av FEM för dem. Beskriv stabilitetsproblemet. (8p)

6. Berätta så mycket du kan om Fredholmteori för integralekvationer. Hitta karakterisiska värden för integralkvationen

$$\lambda \int_0^1 (1 - e^{-x-y}) u(y) dy = u(x).$$

Beskriv för vilka $f(x)$ som ekvationen

$$u(x) - \lambda \int_0^1 (1 - e^{-x-y}) u(y) dy = f(x)$$

har en lösning när λ inte är ett karakterisiskt värde och när λ är något av karakteristiska värden (8p)

Skrivningen beräknas färdigrättas den 22. dec. Ev. granskning tisdagen, den 4. januari, 11-13, i mitt kontor.

GR