PDE, TMA690

Tenta 2010-04-09. Lösningar

1. $u(x,y)$ harmonisk $\Rightarrow$ $u_x(x,y)$ harmonisk;
$x-2y$ är också harmonisk,
så $u_x - (x-2y) \leq 0$ är harmonisk, och
efter Liouville, $u_x - (x-2y) = c$ - konstant.

$$\int (u_x - (x-2y))\,dx = cx + f(y)$$

$$u(x,y) - \frac{x^2}{2} - 2xy = cx + f(y)$$

Funktionen $f(y)$ anpassas så att
$$u = \frac{x^2}{2} + 2xy + cx + f(y) \text{ är harmonisk}$$

$$\Delta u = 1 + f''(y) \quad ; \quad f''(y) = -1; \; f(y) = -\frac{y^2}{2} + ay + b$$

a, b, c godtyckliga.

2. väljer v : $\Delta v = 1$, då
$u+v = w$ är harmonisk;

$$u(0,0) = w(0,0) - v(0,0).$$

Maxprincip för w!

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) - v(0,0) \le u(0,0) \le \max_{(x,y)\in\Gamma} w(x,y) - v(0,0)$$

$$w = u+v \quad , \quad u = 1 \text{ på } \Gamma ,$$

$$1 + \min_{(x,y)\in\Gamma} v(x,y) - v(0,0) \le u(0,0) \le 1 + \max_{(x,y)\in\Gamma} v(x,y) - v(0,0)$$

Man kan försöka med olika funktioner v, t.ex.
$v(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy$; $A+B=2$
och maximisera, minimisera på A, B, C.

3. a) variabelbytet av D'Alembert

$\xi = x+t$
$\eta = x-t$ } ekvationen transformeras till

$$4u_{\xi\eta} = \frac{a}{2}(\xi+\eta) + \frac{b}{2}(\xi-\eta)$$

integrerar på ξ, η, kommer till allmäna lösningen

$$u = f(x+t) + g(x-t) + \frac{1}{8}(a+b)\frac{\xi^2\eta}{2} + \frac{1}{8}(a-b)\frac{\eta^2\xi}{2}$$

b) transformerar till kanoniska formen, hittar allmäna lösningen som i a), bestämer f, g m.h.av Cauchydata

4. $\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle$ – derivata

$\langle \mathcal{F} F, \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F} \varphi \rangle$ – Fourier

Exempel på beräkningar

$$\langle (x\delta')', \varphi \rangle = -\langle x\delta', \varphi' \rangle =$$

$$-\langle \delta', x\varphi' \rangle =$$

$$\langle \delta, (x\varphi')' \rangle = (x\varphi')'(0)$$

$$= \varphi'(0) + 0\,\varphi''(0) = \langle \delta', \varphi \rangle$$

$$(x\delta')' = \delta'$$

$$\langle \mathcal{F}(x\delta' + x^2), \varphi(\xi) \rangle =$$

$$\langle x\delta' + x^2, (\mathcal{F}\varphi)(x) \rangle = \langle \delta', x(\mathcal{F}\varphi)(x) \rangle + \langle x^2, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$= -\left(x(\mathcal{F}\varphi)(x) \right)'(0) + \int x^2 (\mathcal{F}\varphi)(x)\,dx$$

$$= (\mathcal{F}\varphi)(0) + \int e^{i0\cdot x} x^2 (\mathcal{F}\varphi)(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle - \int e^{i0x} (\mathcal{F}\varphi'')(x)\,dx$$

$$= \langle 1, \varphi \rangle - 2\pi\, \varphi''(0)$$

$$\mathcal{F}(x\delta' + x^2) = 1 - 2\pi\, \delta''$$

6. $u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(y)\, e^{x-2y}\, dy$

$= 1 + \lambda e^x \int_0^1 u(y)\, e^{-2y}\, dy$

Därför har $u(x)$ formen

$u(x) = A + Be^x$

med okända A, B. Sätter in i ekvationen

$A + Be^x = 1 + \lambda \int_0^1 (A + Be^y)\, e^{x-2y}\, dy$

$= 1 + \lambda A e^x \int_0^1 e^{-2y} dy + \lambda B e^x \int_0^1 e^{-y} dy$

Jämför koefficienterna före e^x och 1

$A = 1$; $B = \frac{\lambda A}{2}(1 - e^{-2}) + \lambda B (1 - e^{-1})$

Systemet är lösbart om

$\lambda(1 - e^{-1}) \neq 1$.