PDE, F3, Tenta 2010-12-17
TMA690

---

1. $G(x,y) = \Phi(x,y) + g(x,y)$

$\Delta_x g = \Delta_y g = 0$

Om ~~x~~ inte ligger på randen, så är $g(x,y)$ en glatt och begränsad funktion av ~~y~~ variabel i D.

$\Phi(x,y) \to +\infty$ när ~~y~~ $y \to x$

Därför summan $G(x,y) = \Phi(x,y) + g(x,y)$ är positiv när x är nära y.

Vi tar en boll B_ε med centrum i x och radie ε så liten att $G(x,y)$ är positiv på ∂B_ε. Nu för området $\Omega_\varepsilon = D \setminus B_\varepsilon$ är den harmoniska funktionen $G(x,y)$ positiv på en del av randen, ∂B_ε, och 0 på den andra delen, ∂D.

Enligt max. principen, $G > 0$ för $y \in \Omega_\varepsilon$. Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtycklig, så $G > 0$ för alla $x \neq y$.

2. Ekvationen har formen

$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} +$ (lägre ordning)

$A = C = 1$, $B = 1$, $B^2 - AC = 0$

– parabolisk typ.

[Det fanns några som tänkte

$B = 2$ – fel!]

karakteristiska ekvationen

$\varphi_x^2 + 2\varphi_x\varphi_y + \varphi_y^2 = 0$

$(\varphi_x + \varphi_y)^2 = 0$

$\varphi_x + \varphi_y = 0$; Nya variabler.

$\xi = \varphi = x - y$; $\eta = x$

Efter variabelbytet kommer till en parabolisk ekvation i standarta formen med en negativ koefficient b

$\Rightarrow$ max. principen gäller

3. funktionen u är harmonisk, vi har $\Delta(u_x) = (\Delta u)_x = 0$, så är $u_x + u - y - 2$ en harmonisk funktion $\geq 0 \Rightarrow$

$$u_x + u - y - 2 = C$$

$$u_x + u = 2 + C + y$$

$$e^{-x}(e^x u)_x = 2 + C + y$$

$$(e^x u)_x = e^x(2 + C + y)$$

$$e^x u = e^x(2 + C + y) + d(y)$$

$$u = 2 + C + y + d(y)e^{-x}$$

[Det var många som avslutade på den här platsen - men man måste bestämma $d(y)$ och C

$\Delta u = d''(y)e^{-x} + d(y)e^{-x} = 0$ alla $x \Rightarrow d(y)$ måste vara en lösning till ekvationen

$$d''(y) + d(y) = 0$$

$d(y) = p\sin y + q\cos y$, p, q -konstanter

$$u(x,y) = 2 + C + y + (p\sin y + q\cos y)e^{-x}$$

Många avslutade här - men p, q, C måste hittas.

$$u(x,y) + u_x(x,y) \geq y + 2$$

$$(p\sin y + q\cos y)(1-e^{-x}) \geq c$$

när $x \to -\infty$, så har vi

$1-e^{-x} \to -\infty$,

och eftersom $p\sin y + q\cos y$ $(p, q \neq 0)$
är positiv för några y,
så $(p\sin y + q\cos y)(1-e^{-x}) \to -\infty$
och olikheten ~~inte~~ uppfylls
inte. Därför behöver vi

$p, q = 0$

$u(x,y) = 2 + c + y$, $\boxed{c \geq 0}$

4. Enligt D'Alembert formel,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-2t)}{2} + \frac{\varphi(x+2t)}{2}$$

$\varphi(x-2t) \neq 0$ för $|x-2t| < 1$

$\varphi(x+2t) \neq 0$ för $|x+2t| < 1$.

Därför för $t=2$, blir framfront av vågen

$$x = 2 \times 5 + 1 = 11$$

och $x = -2 \times 5 - 1 = -11$

och backfront

$x = 9$ och $x = -9$.

6. Homogena ekvationen

$$\lambda \int_0^1 (1-e^{-x-y}) u(y) dy = u(x)$$

har lösningen

$$u(y) = A + Be^{-x}$$

Sätter in i ekvationen

$$\lambda \int_0^1 (1-e^{-x-y})(A+Be^{-y}) dy = A + Be^{-x}$$

Jämför koefficienterna hos 1 och hos e^{-x}

$$1: \quad \lambda A + \lambda B \int_0^1 e^{-y} dy = A$$

$$2. \quad -\lambda A \int_0^1 e^{-y} dy - \lambda B \int_0^1 e^{-2y} dy = B$$

karakteristiska tal hittas ur ekvationen

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \lambda(1-e^{-1}) \\ -\lambda(1-e^{-1}) & -\frac{\lambda}{2}\left[1-e^{-2}\right]-1 \end{pmatrix} = 0$$

Detta är en kvadratekvation för λ, hittar 2 värden λ_1, λ_2 och motsvarande egenvektorer (A_1, B_1) och (A_2, B_2)

Den ohomogena ekvationen
har lösningen för alla $f(x)$
om $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$
Om λ är ett karakteristiskt
värde, $(\lambda = \lambda_1$ eller $\lambda = \lambda_2)$
så är ekvationen lösbar för
f som är ortogonal med lösningar
till homogena ekv. (vi behöver
inte lösa ~~den~~ konjugerade ekv.
eftersom vår kärna är simmetrisk)
så, om $\lambda = \lambda_1$, f måste satisfiera

$$\int_0^1 f(x)\left(A_1 + B_1 e^{-x}\right)dx = 0.$$