Partiella differentialekvationer

TMA690 2011-04-28

Lösningar.

1. Vi söker någon funktion $V(x,y)$ sådan att $\Delta V = x$.

Till exempel tar vi

$$V(x,y) = \frac{x^3}{6}$$

Funktion $w(x,y) = u(x,y) - V(x,y)$ satisfierar Laplaceekvationen $\Delta w = 0$. Så, enligt maximumprincipen antar w sitt största och minsta värdet på randen. Så

$$\underset{\text{på randen}}{\min w} = -\frac{8}{6} \leq w(x,y) \leq \frac{8}{6} = \max w \text{ på randen}$$

$$-\frac{8}{6} \leq u(x,y) - \frac{x^3}{6} \leq \frac{8}{6}$$

$$-\frac{8}{6} + \frac{1}{6} \leq u(1,0) \leq \frac{8}{6} + \frac{1}{6},$$

$$-\frac{7}{6} \leq u(1,0) \leq \frac{3}{2}$$

Man kan försöka med andra hjälpfunktioner som V, för att få bättre uppskattningar

2 D'Alembert:

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$$

f, g hittas ur bivillkor.

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = f'(x) - g'(x) = 0, \quad x \ge 0$$

$$f(x) = g(x) + C, \quad x \ge 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cancel{+} c & , 0 \le x \le 1 \\ \cancel{\ } c & x > 1 \end{cases} ; \; c = 0$$

~~Vi vet~~

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

för att hitta f, g för negativa x, använder det kvarstående randvillkoret

x=0:

$$f(-t) + g(t) = t$$

Vi vet att $t > 0$: $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

då

$$f(-t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2} & , t \in [0,1] \\ t & , t > 1 \end{cases}$$

$$f(x-t) = \begin{cases} x-t & , x-t < -1 \\ x-t-\frac{1}{2} & , -1 \le x-t < 0 \\ \frac{1}{2} & , 0 \le x-t \le 1 \\ 0 & x-t > 1 \end{cases}$$

$$g(x+t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x+t \le 1 \\ 0, & x+t > 1 \end{cases}$$

framfront: $x = t+1$

bakfront $x = t-1$.

4

$$u_{tt} = \Delta u, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = 0$$

multiplicerar ekvationen med u_t och integrerar

$$\int_D u_{tt} u_t \, dx + \int_D \nabla_x u \cdot (\nabla_x u)_t \, dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_D (u_t^2(x,t) + |\nabla_x u(x,t)|^2)\, dx\right] = 0$$

alltså:

$$\int_D (u_t(x,0)^2 + |\nabla_x u(x,0)|^2)\, dx \qquad (1)$$

$$= \int_D (u_t(x,T)^2 + |\nabla_x u(x,T)|^2)\, dx.$$

Detta beskriver energikonservering.

För ohomogena ekvationen

$u_t - \Delta u - F(x,t) = 0$ gör densamma transformationen

$$\frac{d}{dt}\left[\int_D (u_t^2(x,t) + |\nabla_x u(x,t)|^2)\right] = \int_D u_t \cdot F \, dx$$

∴ ändringen av energi är lika till arbetet av externa kraften.

ur (1) följer unik lösning.

3. $B^2 - AC < 0$

Ekvationen har elliptiska typ

transformerat till formen:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + p u_\xi + q u_\eta = f$$

med hjälp av transformationen

$$\xi = 4y - x$$

$$\eta = \sqrt{23}\, x$$

p, q – några tal.

söker u på formen

$$u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\, e^{a\xi + b\eta}$$

anpassar a, b så att första derivator i ekvationen försvinner: $a = -\frac{p}{2}$, $b = -\frac{q}{2}$

$$\Rightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + p u_\xi + q u_\eta$$

$$= e^{a\xi + b\eta}\left(\Delta v - \frac{1}{4}(p^2 + q^2) v\right)$$

$$u_t - u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - p u_\xi + q u_\eta = 0$$

$$\Rightarrow v_t - \Delta v + \frac{1}{4}(p^2 + q^2) v = 0$$

$$v = e^{\frac{1}{4}(p^2+q^2)t}\, w$$

$$w_t - \Delta w = 0$$

och för den ekvationen gäller Poissons formel.