Projekt om Finita Elementmetoden i kursen PDE F, TMA690, HT 2007

Fredrik Lindgren

30 oktober 2009

Innehåll

1 Syfte och mål

Projektets syfte är att du ska träna dig i implementering av Finita ElementMetoden, FEM. Efter avslutat projekt ska du förhoppningsvis ha fått kunskaper i hur man diskretiserar partiella differentialekvationer med hjälp av finita elementrum. Projektet syftar också till att ge en fördjupad kunskap i modellering av tekniska/fysikaliska system med hjälp av differentialekvationer och insikt i olika geometriers respektive rand- och begynnelsevillkors betydelse. En inte oviktig del är att öva sig i att skriva större och mer komplexa program i MATLAB.

2 Generella riktlinjer

Du skall antingen genomföra ett av projekten som är beskrivna i detta dokument eller formulera ett eget (se nedan).

Följande skall göras i alla projekt:

1. Hitta en och endast en till person att genomföra ditt projekt tillsammans med. Hittar du ingen så ska du skicka mig ett mail till handledaren så parar denne ihop dig med andra ensamma.

2. Ni *ska* träffa handledaren *minst en gång under de fyra första läsveckorna* och presentera vad ni tänker göra. Dessa möten är en del i examinationen så tillvida att det ska framgå att båda deltar i projekten. Boka tid via mail i god tid. Om ni formulerar er egen uppgift ska en kort beskrivning (ekvation, geometri och randvärden) skickas in senast en dag innan handledning. Ni skall vara förberedda och kunna presentera detta på ett klart sätt och/eller kunna ställa väl genomtänkta frågor. Det är bra om du vid det första handledningstillfället kan presentera uppgifterna i punkterna 3-5 eller åtminstone diskutera dessa på ett någorlunda initierat sätt.

3. Variationsformulera er differentialekvation.

4. Skriv ned den diskreta variationsformuleringen

5. Formulera det diskreta problemet på matrisform.

6. Ni ska med hjälp av det ofärdiga programskalet `MyPoissonSolver.m` på kurshemsidan [4] skriva en lösare som löser aktuell partiell differentialekvation med randvillkor utifrån variationsformuleringen av problemet. FEM skall användas.

7. Skriva en mycket kortfattad (men ej innehållslös) rapport (i pdf-format) över projektet som innehåller:

   - Differentialekvationen och dess variationsformulering.
   - Den diskreta variationsformuleringen.
   - Resulterande matrisekvation.
   - Lösningen/lösningarna redovisade i snygga och tydliga figurer.
   - Ett väl kommenterat matlabprogram = lösaren.
   - Beskrivning av använda algoritmer.
   - Slutsater och resonemang runt såväl matematiken/numeriken som runt det fysikaliska i problemet ifråga.
   - Övrigt av relevans i projektet.
   - Namn och personnummer på gruppmedlemmarna.

8. Rapporten ska mailas i form av en pdf-fil till handledaren senast det datum som är angivet på kurshemsidan. Bifoga också en körbar m-fil som fungerar med matlabs mesh-variabler p,t,e som ENDA inargument.

3 Projekt

Vi har konstruerat tre projekt, ett elliptiskt ickelinjärt, ett elliptiskt egenvärdesproblem med koppling till paraboliska problem och ett hyperboliskt linjärt problem. De återfinns nedan under rubrikerna ”Värmeledning i en vattenslang”, ”Egenvärdesproblem” respektive ”Vågrörelse i ett badkar”.[1] Du får också, om du vill, under samråd med handledaren konstruera och lösa ett eget problem.

[1] Det första och dets sista av projekten utvecklades ursprungligen av Christoffer Cromvik våren 2005 och har modifierats något av Fredrik Lindgren hösten 2007. Egenvärdesproblemet har utvecklats av Fredrik Lindgren hösten 2009.

3.1 Värmeledning i en vattenslang

I detta projekt skall vi simulera värmeledning i en oisolerad vattenslang, fylld med stillastående vatten. Slangens omgivning har en temperatur på 300 K. Antag att vi bestrålar slangen med mikrovågor och att det därvid utvecklas värme inne i slangen när vågorna absorberas av vattnet. Denna värmeutveckling beskrivs av funktionen $f(x)$ nedan. Vi betraktar ett tvärsnitt av slangen och förenklar problemet till stationärt. Följande differentialekvation kan beskriva temperaturfördelningen u.

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad \text{i}\ \Omega \\ a n \cdot \nabla u = c(u_0 - u) \quad \text{på}\ \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

där u_0 är temperaturen utanför och n är normalen ut. Ett typiskt värde på a för vatten är $0.6\,\mathrm{W/mK}$, och för c $100\,\mathrm{W/mK}$.

Er uppgift:

- Variationsformulera ekvationen och låt Ω vara en cirkelskiva med radie 1 dm.
- Skriv ett matlabprogram som beräknar temperaturen i slangen. Testa olika f och studera effekten.
- För att få en mer spännande simulering sätter vi yttertemperaturen till 250 K. Is har en annan värmeledningskoefficient, $a_{is} = 2.2\,\mathrm{W/mK}$. Konstanten a kommer därför att vara beroende av u.

$$a(x,u) = \begin{cases} 2.2 & u \leq 273 \\ 0.6 & u > 273 \end{cases} \tag{2}$$

  Detta ger oss en icke-linjär partiell differentialekvation som vi kan lösa med t. ex. fixpunktsiteration. Hur mycket strålningseffekt behövs för att hälften av slangens tvärsnittsarea skall vara tinad om f är konstant?

Extra: Antag att vi strålar in effekt rakt in i en oändligt lång slang (cylindrisk symmetri) och att den sprids och absorberas inne i slangen. Försök att modellera detta. Det borde resultera i ytterligare en elliptisk differentialekvation med Neumann-villkor på randen. Ställ upp denna ekvation och försök koppla den till (1) och (2).

3.2 Egenvärdesproblem

Om A är en elliptisk operator på ett område i rummet Ω så säger egenfunktionerna och egenvärdena till denna väldigt mycket om egenskapen hos denna operator såväl som om lösningarna till motsvarande paraboliska ($\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f$) och hyperboliska ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f$) problem. Vi vet också att egenvärden spelar en viktig roll i både klassisk och modern fysik. Den här uppgiften går ut på att beräkna egenvärden hos ganska generella elliptiska operatorer numeriskt och undersöka hur de förändras när vi förändrar operatorn A eller eller området Ω. Vi passar på att jämföra med från kursen i Fourieranalys kända resultat. Uppgiften borde passa den som är intresserad av matematisk teori såväl som den som gillar numerisk analys eller programmering.

Bakgrund

Man kan visa att under ganska allmänna förutsättningar så har det paraboliska problemet

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (a(x)\nabla u) + \beta(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f \quad \text{i } \Omega, \\ &u = 0 \quad \text{på } \Gamma, \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{3}$$

den svaga lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n t} \int_\Omega u_0(x) e_n(x)\, dx + \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_n} \int_\Omega f(x) e_n(x)\, dx\, ds \right) e_n(x) \tag{4}$$

där $\{\lambda_j, e_j\}_{j=1}^{\infty}$ är egenvärdena och egenfunktionerna till den elliptiska operatorn A definierad som

$$Au := -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + \beta(x) \cdot \nabla u + c(x)u, \tag{5}$$

med randvillkor, det vill säga de uppfyller

$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

eller, om du vill, de löser egenvärdesproblemet att hitta e och λ så att

$$\begin{aligned} &Ae = \lambda e \quad \text{i } \Omega, \\ &e = 0 \quad \text{på } \Gamma. \end{aligned} \tag{6}$$

Exempel.

Vi har sett i kursen i Fourieranalys att om Ω är rektangeln $(0, L) \times (0, M)$ och $a = 1$, $c = 0$ och $\beta = 0$ så har vi med lite annan notation att

$$\{\lambda_{ij}, e_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty} = \left\{\pi\left(\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{M^2}\right), \sin(i\pi x/M)\sin(j\pi y/L)\right\}_{i,j=1}^{\infty}.$$

Några feluppskattningar.

Det går att approximera såväl egenfunktioner som egenvärden med finita elementmetoden. De approximativa egenvärdena $\lambda_{n,h}$ uppfyller då

$$\lambda_n \leq \lambda_{n,h} \leq \lambda_n(1 + C(n, \Omega)h^2) \tag{7}$$

om h är den största av alla triangelsidorna i finita elementnätet. Om egenvärdena är sorterade i växande ordning uppfyller den approximativa egenfunktionen $e_{1,h}$ till det minsta egenvärdet olikheten

$$\|e_{1,h} - e_1\| \leq Ch^2. \tag{8}$$

Båda resultaten gäller om kontinuerliga och styckvis linjära funktioner används för att approximera lösningen [2, Kapitel 6].

Grunduppgift

Grunduppgiften består av att

- Variationsformulera egenvärdesproblemet (6) med hela operatorn (5).
- Formulera den diskreta variationsformuleringen.
- Skriv upp det diskreta problemet på matrisform.
- Färdigställ FEM-lösaren `MyPoissonSolver.m` så att den assemblerar alla relevanta matriser och löser den diskreta motsvarigheten till (6) för $\beta = 0$ och $a = 1$ men godtycklig $c(x) \geq 0$.
- Sätt först $a = 1$ och $c = 0$ och lös egenvärdesproblemet för kvadraterna $\Omega_1 = (-1, 1) \times (-1, 1)$ och $\Omega_2 = (-3, 3) \times (-3, 3)$ och jämför med de teoretiska lösningarna. Lös också för det L-formade området $\Omega_3 = \{(-2, -1) \times (-2, 2) \cup (-2, 2) \times (1, 2)\}$. Avsluta med något lite mer konstigt område $\Omega_4 : \Omega_1 \subset \Omega_4 \subset \Omega_2$. Jämför egenvärdena mellan de olika fallen. Undersök också vad som händer om man istället använder en ickekonstant funktion $c(x)$.

Extrauppgift

För full poäng skall du dessutom göra *någon* av följande extrauppgifter:

1. Gör det ovanstående för $\beta \neq 0$. Testa på ett cirkulärt område med $\beta = \epsilon(y, -x)$, $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ som är divergensfritt respektive $\beta = \epsilon(x, y)$ där $\nabla \cdot \beta = 2\epsilon$. Jämför! Matlabs `eig` ger en matris med alla egenvektorer. Undersök dess determinant och konditionstal. Kommentarer?

2. Givet de approximativa egenfunktionerna $\{e_{j,h}\}_{j=0}^{\infty}$ och egenvärdena $\{\lambda_{j,h}\}_{j=0}^{\infty}$ skriv ett program som beräknar den approximativa lösningen till
$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \quad \text{i } \Omega, \\ &u = 0 \quad \text{på } \Gamma, \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{9}$$
för godtyckligt u_0 genom att projicera u_0 på egenfunktionerna enligt (4). Notera att egenfunktionerna som ges i Matlab inte är $L_2(\Omega)$-normaliserade!Det kan vara värt att påpeka att du ska skriva ett program som löser den *rumsdiskretiserade* varianten av (9) exakt upp till flyttalsnoggrannhet, se [1, Kapitel 8.3].

3. Undersök i samråd med handledaren storleken på konstanterna och hur felet konvergerar mot noll då h går mot noll i någon av ekvationerna (7) eller (8). Det här är en typ av studie som ofta görs av forskare i numerisk analys och beräkningsmatematik.

4. Gör i samråd med handledaren något annat relaterat till egenvärdesproblem som är av ungefär samma svårighetsgrad som övriga uppgifter här.

3.3 Vågrörelse i ett badkar

Vattenytans rörelse i ett badkar kan beskrivas av en partiell differentialekvation, vågekvationen. Låt oss kalla vattenytans område för Ω, som är ett tvådimensionellt område. Lösningen till följande differentialekvation ger rörelsen på vattenytan.

$$\begin{cases} \ddot{u} - \Delta u = f \quad \text{i } \Omega \\ n \cdot \nabla u = 0 \quad \text{på } \Gamma \\ u(x,0) = u_0 \quad u'(x,0) = v_0 \end{cases} \tag{10}$$

Er uppgift är att:

- Variationsformulera ekvation (1).
- Diskretisera variationsformuleringen. Approximera tidsderivatan med $\ddot{U} = (U_{n+1} - 2\,U_n + U_{n-1})/k^2$, där k är tidssteget och $U_n = U(t_n)$. Den ambitiöse ansätter $v = \dot{u}$ och löser det erhållna kopplade systemet istället med tidsdiskretisering enligt [3].
- Låt $k < h$, där h är elementlängden.
- Skapa ett matlabprogram som simulerar en vågrörelse på vattenytan.

För att hantera startvärdet korrekt, räknar vi först ut accelerationen enligt $Ma_0 = f_0 - S\,u_0$, där M är massmatrisen. Sen kan vi ersätta u_{-1} med

$$u_{-1} = u_0 - k\,v_0 + \frac{k^2}{2}a_0$$

Extra: Ändra randvillkoren till homogena Dirichlet-villkor, $u = 0 \quad \text{på } \Gamma$. Vad för system kan tänkas beskrivas av denna ekvation? Jämför resultaten med de du fått i grunduppgiften. Vad händer till exempel med energin i respektive system?

3.4 Eget projekt

Det egna projektet ska i princip följa samma upplägg som de färdigkonstruerade. I synnerhet ska det innehålla en partiell differentialekvation med geometri och randvillkor som ska variationsformuleras, diskretiseras och därefter lösas med hjälp av Finita Elementmetoden. Handledaren ska godkänna projektet innan du sätter igång. Har du en lös idé så kan du få hjälp med att konkretisera denna under handledningstillfälle.

4 Tips, trix och varningar

- Skapa geometrier och generera trianguleringen med hjälp av Matlabs pdetool.
- Tänk igenom hur man felsöker ett program på ett bra sätt. Diskutera detta med handledaren vid handledningstillfälle.
- Använd programskalet MyPoissonSolver.m att utgå ifrån när ni löser er ekvation. Det som fattas i programmet för att lösa Poissons ekvation är alla funktioner utom en för att räkna ut elementmatriser och -vektorer. Rutinen `ElemDiffMatrix` finns som exempel. Komplettera med de rutiner som fattas och anpassa sedan programmet till er tillämpning.
- Programmet MyPoissonSolver.m hanterar randvillkor på formen

  $$n \cdot \nabla u = k(g - u).$$

  För att simulera Dirichlet-randvillkor låt $k = 10000$, det vill säga jättestort och sätt g till det värdet ni vill att u skall följa.
- För att evaluera integralerna i era elementmatriser är det lämpligt att använda kvadratur. För att skapa elementmassmatrisen kan det vara bra att välja mittpunkten på triangelns kanter för detta. I [1, avsnitt 12.2] finns beskrivningar av lite olika kvadraturmetoder. Fundera över hur exakta metoder som kan tänkas behövas. Diskutera saken med din handledare.
- För att snabba på beräkningarna spara matriserna som glesa matriser med hjälp av matlabs kommando `sparse`. Se Matlabs hjälpfunktion. Invertera aldrig matriser utan använd \.
- För mer information om implementation, se anteckningar på hemsidan [3], eller [1, sid. 43-47].

Observera att beräkningarna ska genomföras med hjälp av finita elementmetoden och inte något annat. Till exempel ska inte någon finit differensmetod användas. För full poäng krävs att även extrauppgift genomförs.

5 Och sen då?

För den som tycker att det här är intressant så rekommenderar vi fortsättningskursen i PDE, TMA026 [5], som behandlar PDE-teori i Sobolev-rum mer i detalj samt går djupare in på numerisk approximation av lösningar. Kursen är helt teoretisk. På matematiska institutionen ges också en projektkurs i PDE, TMA632 [6], där du får skriva FEM-lösare för lite svårare problem. Den behandlar även teori runt adaptivitet. Du hittar kursbeskrivningar via matematiska vetenskapers hemsida och via studieportalen. Prata gärna med handledarna om du undrar vad man gör när man doktorerar i beräkningsmatematik!

Referenser

[1] Claes Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Studentlitteratur, 1987.

[2] Stig Larsson och Vidar Thomée *Partial Differential Equations with Numerical Methods*, Springer, 2003.

[3] Christoffer Cromvik och Fredrik Lindgren, *FEM Implementation*, OH-slides på kursens hemsida.

[4] http://www.chalmers.se/math/SV/utbildning/grundutbildning-chalmers/arkitekt-och/teknisk-fysik/tma690

[5] http://www.chalmers.se/math/SV/utbildning/grundutbildning-chalmers/mastersutbildning/engineering-mathematics/tma026

[6] http://www.chalmers.se/math/SV/utbildning/grundutbildning-chalmers/mastersutbildning/engineering-mathematics/tma632