TMA 690, 2011-12-15 lösningar

1 a) Med. max. principen: Om det finns 2 lösningar, u_1, u_2, så tar vi $u = u_1 - u_2$,

(*) $u_t - u_{xx} + e^x u = 0$; $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$

Villkoret för koefficienten b uppfylls, så har u sitt största positivt värdet och minsta negat. värdet $0 \Rightarrow u = 0$

b. multip. (*) med u och integrera i x

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(x,t)\,dx = -\int_0^1 u_x^2\,dx - \int e^x u\,dx \leq 0$$

Detta betyder att $\int_0^1 u^2(x,t)\,dx$ inte växer $\Rightarrow = 0$.

c. $u_t - u_{xx} + e^x u(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) = 0$

$$-b = e^x(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) \geq 0$$

därför maxprinc. används

d. $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\,dx = -\int_0^1 u_x^2\,dx - \int_0^1 e^x u^4\,dx \leq 0.$$

2. Vi väljer en enkel funktion $v(x,y)$, $\Delta v = -1$.
Vi kan ta $v(x,y)$ som en polynom
$v(x,y) = ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey$, $\underline{a+c = -\frac{1}{2}}$
för $w(x,y) = u(x,y) + v(x,y)$, har vi

$$\min_{(x,y)\in\partial D} v(x,y) \le w(1,1) \le \max_{(x,y)\in\partial D} v(x,y) \qquad (*)$$

En komplett lösning skulle vara om man hittar min och max i $(*)$ och optimerar i koefficienterna a, b, c, d, e. Jag visar ett enkelt fall:

$v(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + ey$, e

$$\max_{(x,y)\in D} v(x,y) \begin{cases} = 0 + 4e, & \text{om } e \ge 0 \\ = 0, & \text{om } e \le 0 \end{cases}$$

Därför $w(1,1) \le 0 + 4e$, $e \ge 0$

om $e \ge 0$: $u(1,1) = w(1,1) - v(1,1) \le 4e - \left(-\frac{1}{2}1^2 + e\right)$
$= 3e + \frac{1}{2}$; minimerar: $u(1,1) \le \frac{1}{2}$

om $e \le 0$ $\quad w(1,1) \le w(1,1) - v(1,1) \le 0 - \left(-\frac{1}{2}1^2 + e\right) = \frac{1}{2} - e$

minimerar: $u(1,1) \le \frac{1}{2}$.

Med ett annat val av v kan uppskattningen förbättras.

3. Föst hittar vi någon lösning till ohomogena ekvationen ; ett enkelt val bliv $u_p(x,t) = \sin x$.

Efter detta, här allmäna lösningen, enligt D'A.

$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) + \sin x$ med godtyckliga f och g.

funktionerna f och g hittas ur Cauchyvillkor.

T. ex. för det karakteristiska Cauchyproblemet

$u(x,x) = f(2x) + \sin x + g(0)$

$f(2x) = -\sin x - g(0)$,

$f(x) = -\sin\frac{x}{2} - g(0)$ (1)

$u(x,-x) = f(0) + g(2x) + \sin x = \cos x$

$g(2x) = -f(0) - \sin x + \cos x$

$g(x) = -f(0) - \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ (2)

$f(0)$ och $g(0)$ hittas genom att sätta $x=0$ i (1) och (2)

vi kommer till systemet

$$\begin{cases} f(0) = -\sin 0 - g(0) \\ g(0) = -\sin 0 - f(0) + \cos 0 \end{cases}$$

Systemet är inte lösbart.

Interpretara : 1: f eller g är inte kontinuerl. i punkten $x=0$, så man får inte sätta $x=0$ i (1) och (2) utan måste betrakta gränsvärden.

2. Det var fel på uppgiften och man ska ändra, t. ex. till $u(x,-x) = \cos x - 1$.

4. Derivatan

för $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$F_f'(\varphi) \overset{def}{=} -F_f(\varphi') =$$

$$-\int_0^\pi \varphi'(x)\cos x\,dx \overset{P.I}{=}$$

$$= -\int_0^\pi \varphi(x)\sin x\,dx + \varphi(0) - \varphi(\pi)$$

$$\Rightarrow \quad F_f' = F_{\sin x,(0,\pi)} + \delta(0) - \delta(\pi)$$

$$F_f''(\varphi) = -F_f'(\varphi') =$$

$$\int_0^1 \varphi'(x)\sin x\,dx - \varphi'(0) + \varphi'(\pi)$$

$$= -\int_0^1 \cos x\,\varphi(x)\,dx - \varphi'(0) + \varphi'(\pi)$$

$$F_f'' \quad F_{-\cos x,(0,\pi)} + \delta'(0) - \delta'(\pi)$$

Fourier. $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$

$$= \int_0^\pi \cos x\,\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_0^\pi \cos x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\varphi(\xi)\,d\xi\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi \int_0^\pi \cos x\, e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi \int_0^\pi \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} e^{-i\xi x}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(1-\xi)x}}{i(1-\xi)} - \frac{e^{i(-1-\xi)x}}{-i(1+\xi)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}}\,d\xi.$$

Det understrykta uttrycket ger svaret.

6. $u(x) = \sin x + \lambda \int_0^\pi u(y) \sin(x+2y)\, dy$

$= \sin x + \lambda \int_0^\pi \sin x \, u(y) \cos 2y \, dy + \lambda \int_0^\pi \cos x \, u(y) \sin 2y \, dy$

vi får att $u(x) = A \sin x + B \cos x$.
Sätter in i ekvationen.

$$A \sin x + B \cos x$$
$$= \sin x + \lambda \sin x \int_0^\pi (A \sin y + B \cos y) \cos 2y \, dy$$
$$+ \lambda \cos x \int_0^\pi (A \sin y + B \cos y) \sin 2y \, dy$$

Jämför koefficienterna vid $\sin x$ och $\cos x$:

$\sin x$:
$$A = 1 + \lambda \left(A \int_0^\pi \sin y \cos 2x \, dx + B \int_0^\pi \cos y \cos 2y \, dy \right)$$

$$0 = \lambda A \int_0^\pi \sin y \sin 2y \, dy + \lambda B \int_0^\pi \cos y \sin 2y \, dy$$

Systemet är lösbart för alla λ utom de 2 för vilka det homogena systemet har $\det = 0$. För dessa 2 speciella λ gäller Fredholm 3.