Lösningsförslag inlämningsuppgifter I

1.2(a) PDEns karakteristiska ekvation är

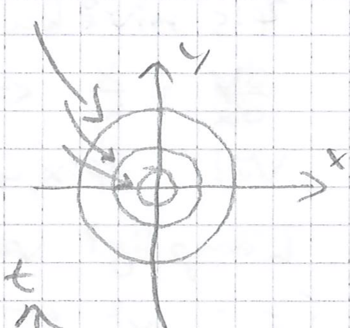
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{xy} = -\frac{x}{y}$$

Lös denna separabla ODE:

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \leftarrow \text{karakteristiska kurvor}$$



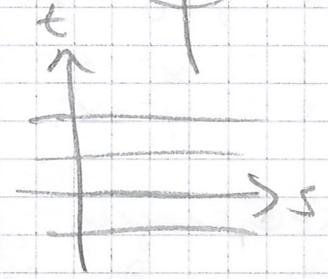
Lös ut konstanten:

$$\psi(x,y) := x^2+y^2 = 2C$$

De k.k. är ψ:s nivåkurvor

Gör variabelbytet

$$s = x \quad \leftarrow \text{i princip godtycklig}$$
$$t = x^2+y^2 \quad \leftarrow \text{rätar upp de k.k.}$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1\cdot\dfrac{\partial u}{\partial s} + 2x\dfrac{\partial u}{\partial t} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 + 2y\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad \text{enl. kedjeregeln}$$

PDEn blir:

$$xy\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \cancel{2x\frac{\partial u}{\partial t}}\right) - x^2\left(\cancel{2y\frac{\partial u}{\partial t}}\right) - yu = xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{x}u = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{s}u = 1$$

Linjär ODE ordning 1.

Integrerande faktor $e^{-\int \frac{1}{s}ds} = e^{-\ln s} = \frac{1}{s}$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{s^2}u = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}u\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}u = \ln s + C(t)$$

$$u = s\ln s + s\,C(t)$$

Tillbaka till x, y:

$$\boxed{u(x,y) = x\ln x + x\cdot C(x^2+y^2)}$$

där $C(\cdot)$ är en godtycklig envariabelfunktion.

1.9 (a) $AC - B^2 = y^2 \cdot x^2 - (xy)^2 = 0$

Vi har alltså en parabolisk PDE, och söker en lösning till den karakteristiska ekvationen

$$y^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2xy\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

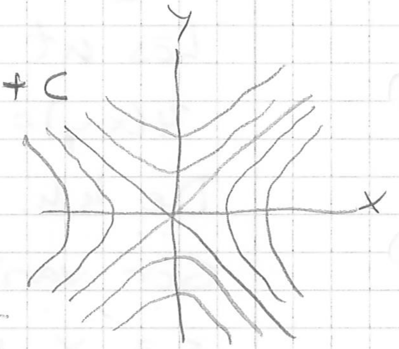
Faktorisera till linjära 1:a ordningens PDE:

$$\left(y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

φ:s nivåkurvor fås genom ODEn:

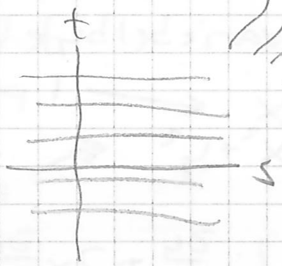
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \iff \int y\,dy = \int x\,dx \iff y^2 = x^2 + C$$



Välj $\varphi(x,y) = y^2 - x^2 \ (= C)$

Lämpligt variabelbyte:

$$\begin{cases} s = x^2 & \leftarrow \text{I princip godtycklig.} \\ t = y^2 - x^2 & \leftarrow \text{rätar upp k.k.} \end{cases}$$



Kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\frac{\partial u}{\partial s} - 2x\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 2y\frac{\partial u}{\partial t}$$

PDEn blir:

$$0 = y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial u}{\partial s} - 2x\frac{\partial u}{\partial t}\right) + 2xy\frac{\partial}{\partial x}\left(2y\frac{\partial u}{\partial t}\right) + x^2\frac{\partial}{\partial y}\left(2y\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$= 2y^2\left(\frac{\partial u}{\partial s} + x\left(2x\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \cancel{- 2x\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} - x\cdot\left(\cancel{2x\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}} \cancel{- 2x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\right)\right)$$

$$+ 2xy\cdot 2y\left(\cancel{2x\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}} \cancel{- 2x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\right) + 2x^2\left(\frac{\partial u}{\partial t} + y\cdot\left(\cancel{2y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}\right)\right)$$

$$= 2\underbrace{y^2}_{s+t}\frac{\partial u}{\partial s} + 2\underbrace{(x^2 - y^2)}_{-t}\frac{\partial u}{\partial t} + 4\underbrace{x^2 y^2}_{s(s+t)}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

PDEn kanoniska form blir

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{t}{2s(s+t)}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2s}\frac{\partial u}{\partial s} = 0}$$

(b) $AC - B^2 = 1\cdot 0 - (-x)^2 = -x^2 \le 0$ ③

Vi har en hyperbolisk PDE (för $x \neq 0$), och söker två lösningar till den karakteristiska ekvationen

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - 2x\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$$

1. $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \iff \nabla\psi$ vertikal $\iff$ ψ:s nivåkurvor horisontella. Välj

$\psi(x,y) = y = C$

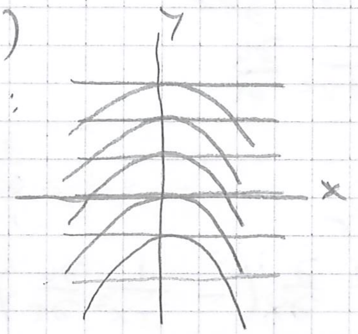
2. $\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2x\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$

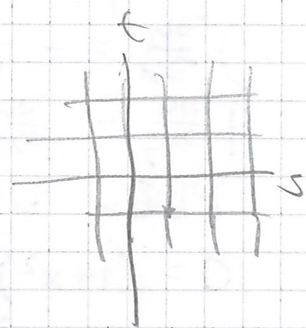
karakt. ekv.: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1} \Rightarrow y = -x^2 + C$. Välj

$\psi(x,y) = x^2 + y \; (= C)$

Lämpligt variabelbyte:

$$\begin{cases} s = x^2 + y \\ t = y \end{cases}$$





Notera att de två familjerna av k.k. tangerar varandra på y-axeln, där PDEn är parabolisk!

Kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

PDEn blir:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial u}{\partial s}\right) - 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$= 2\frac{\partial u}{\partial s} + 2x\left(\cancel{2x\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}\right) - 2x\left(\cancel{2x\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\right)$$

$$= 2\frac{\partial u}{\partial s} - 4\underbrace{x^2}_{s-t}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}$$

PDEn kanoniska form blir

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} - \frac{1}{2(s-t)}\frac{\partial u}{\partial s} = 0}$$

1.10(a) $AC - B^2 = (1+x^2)^2 \cdot 1 - 0^2 > 0$

Vi har en elliptisk PDE, och vi söker en komplex lösning till den karakteristiska ekv.

$$(1+x^2)^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$\left((1+x^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left((1+x^2)^2\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

$$(1+x^2)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i}{1+x^2} \qquad y = i\arctan x + C$$

$$\varphi(x,y) = y - i\arctan x$$

Lämpligt variabelbyte:

$$\begin{cases} s = y & = \text{realdel av } \varphi \\ t = -\arctan x & = \text{imaginärdel av } \varphi \end{cases}$$

Kedjeregeln ger:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s} \end{cases}$$

PDEn blir:

$$0 = (1+x^2)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + 2x(1+x^2)\left(-\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$= (1+x^2)^2\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

PDEns kanoniska form är alltså precis Laplaces ekvation.

CJ2.10 För att finna V multiplicerar vi ekvationen med φ och integrerar:

$$\int_0^1 f\varphi\,dx = \int_0^1 u^{(4)}\varphi\,dx \overset{(*)}{=} \underbrace{[u^{(3)}\varphi]_0^1}_{=u^{(3)}(1)\varphi(1)-u^{(3)}(0)\varphi(0)} - \underbrace{[u^{(2)}\varphi']_0^1}_{=u''(1)\varphi'(1)-u''(0)\varphi'(0)} + \int_0^1 u''\varphi''\,dx$$

Om $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ och $u''(1)=-\gamma u'(1)$, $u''(0)=\gamma u'(0)$:

$$\int_0^1 u''\varphi''\,dx + \gamma\big(u'(1)\varphi'(1)+u'(0)\varphi'(0)\big) = \int_0^1 f\varphi\,dx$$

Vi sätter

$$a(u,\varphi) := \int_0^1 u''\varphi''\,dx + \gamma\big(u'(1)\varphi'(1)+u'(0)\varphi'(0)\big)$$

$$L(\varphi) = \int_0^1 f\varphi$$

$V = \{u\in L_2(0,1);\ u',u''\in L_2(0,1)$ i distributionsmening och $u(0)=u(1)=0\}$

V-norm: $\|u\|_{H^2} = \left(\int_0^1 (|u|^2+|u'|^2+|u''|^2)\,dx\right)^{1/2}$.

(a) (D) $\Rightarrow$ (V) visat ovan.

(V) $\Rightarrow$ (D): Om u löser (V) får vi från (*):

$$\int_0^1 u^{(4)}\varphi\,dx = u^{(3)}(1)\varphi(1)-u^{(3)}(0)\varphi(0)$$
$$+u''(1)\varphi'(1)-u''(0)\varphi'(0)$$
$$+\int_0^1 f\varphi - \gamma\big(u'(1)\varphi'(1)+u'(0)\varphi'(0)\big)$$

Speciellt om $\varphi_k\in V$, $\varphi_k\to\delta_x$ svagt följer $u^{(4)}=f$ i $(0,1)$.

Då $\varphi(1)=\varphi(0)=0$ för $\varphi\in V$ har vi nu

$$0=\big(u''(1)-\gamma u'(1)\big)\varphi'(1)+\big(u''(0)+\gamma u'(0)\big)\varphi'(0)$$

kan anta godtyckliga värden för $\varphi\in V$.

Vi har visat $u''(1)-\gamma u'(1) = u''(0)+\gamma u'(0)$

$u(1)=u(0)=0$ ty $u\in V$

$u^{(4)}=f$

$\therefore$ u löser (D), om vi antar att $u^{(4)}(x)$ existerar.

Räkningarna visar att $u(0)=0$ och $u(1)=0$ är essentiella randvillkor, medan de övriga är naturliga randvillkor.

(b) Kontinuiteten:

$$|u'(1)| = \left|\int_0^1 (x u'(x))' \, dx\right| = \left|\int_0^1 (u' + x u'') dx\right|$$
$$\leq \int_0^1 (|u'| + |u''|) \, dx \leq \left(\int_0^1 \underbrace{(|u'| + |u''|)^2}_{\leq 2(|u'|^2 + |u''|^2)} dx\right)^{1/2}$$

och liknande $|u'(0)| \leq \sqrt{2} \|u\|_{H^2}$

Detta och Cauchy-Schwarz olikhet visar a och L kontinuerliga.

Linjaritet och symmetri är uppenbart.

- V = Hilbertrum ?

Vi tror på $H^2(0,1) = \{u \in L_2, u', u'' \in L_2\}$ är Hilbertrum.

Vi behöver visa $\|u_n - u\|_{H^2} \to 0$ och $u_n(1) = 0$

$\Rightarrow u(1) = 0$ (samt motsvarande för $x = 0$)

Som ovan visas $|v(1)| \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^2}$, $\forall v \in H^2$.

Tag $v = u_n - u$:

$|u_n(1) - u(1)| \leq \sqrt{2} \|u_n - u\|_{H^2} \to 0$, v.s.b.

- $a(u, v)$ elliptisk ?

Finns $\alpha > 0$ s.a. för alla $u \in V$:

$$\int_0^1 |u''|^2 dx + \gamma(u'(1)^2 + u'(0)^2) \geq \alpha \int_0^1 (u^2 + |u'|^2 + |u''|^2) dx \quad ?$$

Vi vet $u(1) = u(0) = 0$ och därmed $\int_0^1 u' = 0$.

Enligt Poincaré's olikhet har vi

$$\int_0^1 u^2 dx \leq C \int_0^1 u'^2 dx$$
$$\int_0^1 u'^2 dx \leq C \cdot \int_0^1 u''^2 dx \quad \text{för någon konstant } C < \infty.$$

Då $\gamma \geq 0$ visar detta ellipticiteten.

2,6: För att finna (V) mult. vi med testfunktion φ och integrerar: ⑦

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \overset{(*)}{=} /\text{Green } 1/ = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - \int_{\partial\Omega} \overset{=g-\gamma u}{\frac{\partial u}{\partial n}}\cdot\varphi$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega}\gamma u\varphi\,d\sigma}_{=:\,a(u,\varphi)} = \underbrace{\int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} g\varphi}_{=:\,L(\varphi)}$$

$V = H^1(\Omega) = \{u\in L_2(\Omega)\,;\,\nabla u\in L_2(\Omega)\}$

med norm $\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2+u^2)\,dx\right)^{1/2}$

a, L, V definierar variationsproblemet (V).

(a) (D) $\Rightarrow$ (V) visat ovan.

(V) $\Rightarrow$ (D): Antag $u\in V$ löser (V). $(*)\Rightarrow$

$$\int_\Omega(-\Delta u)\cdot\varphi\,dx = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\cdot\varphi\,d\sigma$$

$$= -\int_{\partial\Omega}\gamma u\varphi\,d\sigma + \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_{\partial\Omega} g\varphi\,d\sigma - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\varphi\,d\sigma$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega(\Delta u+f)\varphi\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma u - g\right)\varphi\,d\sigma \quad ,\forall\varphi\in V.$$

Med $\varphi_h\in V$ och $=0$ nära $\partial\Omega$, och $\varphi_h\to\delta_x$ svagt $(x\in\Omega)$ så följer $\Delta u = -f$ i hela Ω.

$$\to \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma u-g\right)\varphi\,d\sigma = 0,\quad \forall\varphi\in V.$$

Tag nu $\varphi_h\to\delta_x$ svagt på $\partial\Omega$. $(x\in\partial\Omega)$

Då följer $\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma u = g$ på hela $\partial\Omega$ ← Så detta är ett naturligt randvillkor

Så, under förutsättning att u är 2 gånger deriverbar följer att u löser Robinproblemet.

(b) För kontinuiteten behöver vi visa:

$$\int_{\partial\Omega}|u|^2\,d\sigma \le C\int_\Omega(|\nabla u|^2+u^2)\,dx \quad ,\forall u\in H^1(\Omega)$$

<u>Bevis</u>: Låt $\bar{v}$ vara ett vektorfält.

Enligt Gauss sats: (8)

$$\int_{\partial\Omega} \bar{n}\cdot(|u|^2\bar{v})\,d\sigma = \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div}(|u|^2\bar{v})}_{= 2u\nabla u\cdot\bar{v} + |u|^2\operatorname{div}(\bar{v})} dx$$

Välj nu $\bar{v}$ så att $\bar{n}\cdot\bar{v} \geq 1$ på $\partial\Omega$ och

$|\bar{v}| + |\operatorname{div}\bar{v}| \leq C$ i Ω $\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma \leq C\int_\Omega (2|u||\nabla u| + |u|^2)\,dx$$

Cauchy-Schwarz olikhet visar nu uppskattningen (spårolikheten) $\square$

- Linjäritet och symmetri är uppenbart. V = Hilbertrum tror vi på,
- Det återstår att visa att a är elliptisk:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \gamma\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \underset{?}{\geq} \alpha\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\,dx \quad , \forall u \in H^1(\Omega).$$

Vi behöver Poincarés olikhet: En variant av denne visar

$$\int_\Omega |u(x) - \underbrace{⨍_{\partial\Omega} u\,d\sigma}_{\substack{\text{medelvärdet} \\ \text{av } u \text{ på } \partial\Omega}}|^2 dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

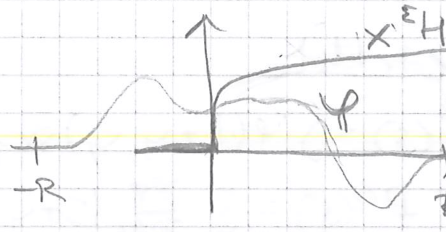
$$\Rightarrow \int_\Omega u^2 dx \leq C\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + C_2\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma$$

Från detta följer ellipticiteten.

GF 9.1.7 $\quad |x|^2\Delta\delta[\varphi] = \Delta\delta[|x|^2\varphi]$

$$= (-1)^2\,\delta[\underbrace{\Delta(|x|^2\varphi)}_{= \underbrace{(\Delta|x|^2)}_{=2n}\varphi + 2\underbrace{(\nabla|x|^2)}_{=2x}\cdot\nabla\varphi + |x|^2(\Delta\varphi)}]$$

$$= 2n\varphi(0) + 0 + 0 = 2n\delta[\varphi]$$



9.2.8 $x^\varepsilon H[\varphi] = \int_0^\infty x^\varepsilon \varphi(x)\,dx$

$\to \int_0^\infty \varphi\,dx = H[\varphi]$

då $\varepsilon \to 0^+$.

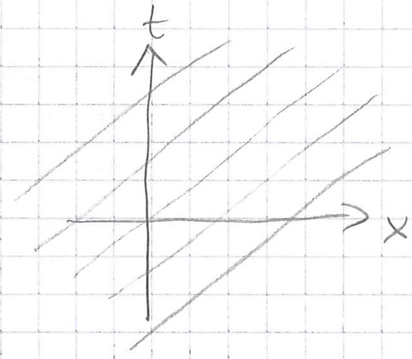
Dette följer då $\varphi(x)=0$ då $|x|>R$,
$|x^\varepsilon \varphi(x)| \leq C$ då $|x|\leq R$ och $x^\varepsilon \to 1$, $\varepsilon \to 0^+$
för varje $x>0$.

$$\varepsilon x^{\varepsilon-1} H[\varphi] = \int_0^\infty \varepsilon x^{\varepsilon-1}\varphi(x) = \underbrace{\left[x^\varepsilon \varphi(x)\right]_0^\infty}_{=0-0} - \int_0^\infty x^\varepsilon \varphi'$$

$\to -\int_0^\infty \varphi'\,dx = \varphi(0) = \delta[\varphi]$ enligt ovan.

$\therefore$ $\boxed{x^\varepsilon H \to H \text{ och } \varepsilon x^{\varepsilon-1} H \to \delta \text{ svagt}}$

9.5.5 För en funktion $g(s)$ har vi



$\iint g(x-t)\,\varphi(x,t)\,dx\,dt$

$= \Big/ \begin{matrix} x = s+t \\ t = t \end{matrix} \Big/ = \iint g(s)\,\varphi(s+t,t)\,ds\,dt$

$= \int g(s)\left(\int \varphi(s+t,t)\,dt\right) ds$

För $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ definierar vi

$\varphi_1(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s+t,t)\,dt$ så $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

För $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definierer vi distributionen

$F_2[\varphi] := F[\varphi_1]$

så att $F_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ och formellt $F_2(x,t) = F(x-t)$.

(b) $\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}[\varphi] = F_2\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right] = F\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_1\right]$

$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}[\varphi] = F_2\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] = F\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_1\right]$

Vi behöver alltså visa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(\underbrace{s+y}_{x\text{-argument}}, \underbrace{y}_{t\text{-argument}}) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s+y, y) \right) dy = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Betrakta

$$f(s) = \int \varphi(s+y, y)\,dy = \int \varphi(y, y-s)\,dy$$

$$\Rightarrow f''(s) = \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s+y, y)\,dy = \int (-1)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(y, y-s)\,dy$$

$$= \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(s+y, y)\,dy$$

variabelbyte i integralen.

Detta visar att det finns en massa icke-släta funktioner, till och med distributioner F_2, som löser vågekvationen $\frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}$.