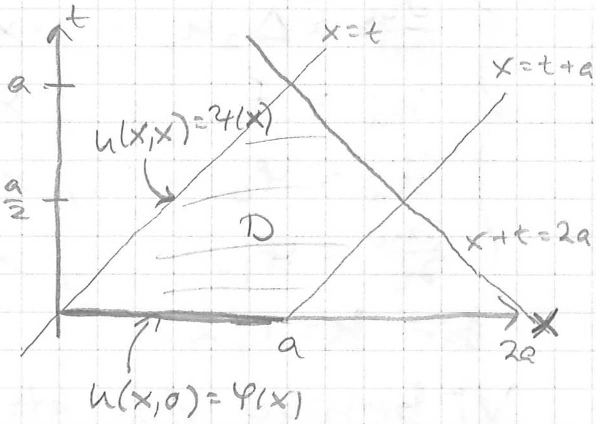
Lösningsförslag inlämningsuppgifter II

2.4 Vi söker lösning till vågekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i D med start/rand-värden givna enligt figur.



Allmänna lösningen till PDEn ges av d'Alemberts lösning:

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t) \qquad (*)$$

Villkoren vid ∂D ger

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), & 0<x<a \qquad (1) \\ f(0) + g(2x) = \psi(x), & 0<x<a \qquad (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow g(s) = \psi(\frac{s}{2}) - f(0)$ för $0<s<2a$

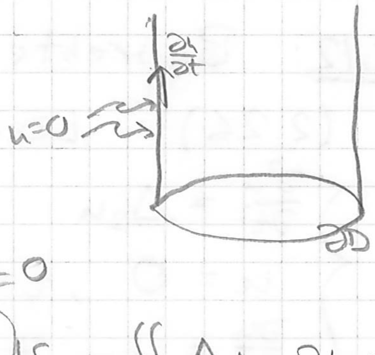
$(1) \Rightarrow f(x) = \varphi(x) - \psi(\frac{x}{2}) + f(0)$ för $0<x<a$

$$(*) \Rightarrow u(x,t) = \varphi(x-t) - \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) + \cancel{f(0)} + \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \cancel{f(0)}$$

Svar: $u(x,t) = \varphi(x-t) - \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+t}{2}\right)$

2.10 (a) Givet: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_2 u$ i ett begränsat område $D \subset \mathbb{R}^2$,
$u = 0$ på ∂D för $t \geq 0$

Vise: $\frac{\partial}{\partial t} \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u|^2 \right) dx\,dy = 0.$



Lösning: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 = 2 \langle \nabla u, \underbrace{\partial_t \nabla u}_{= \nabla(\partial_t u)} \rangle$

Enligt Green 1:

$$\iint_D \langle \nabla u, \nabla(\partial_t u) \rangle \, dx\,dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} ds - \iint_D \Delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx\,dy$$

$$= - \iint_D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u|^2 \right) dx\,dy = \iint_D \left(2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx\,dy = 0.$$

(b) Antag u_1 och u_2 löser ②

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \Delta_2 u_k &, x \in D, t \geq 0 \\ u_k = f &, x \in \partial D, t \geq 0 \\ u_k = \varphi_0 &, x \in D, t = 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} = \varphi_1 &, x \in D, t = 0 \end{cases}$$

för $k = 1, 2$.

Vi behöver visa att $u_1 = u_2$ för $x \in D$, $t \geq 0$.

Bilda $u := u_1 - u_2$.

Då löser u : $\partial_t^2 u = \Delta_2 u$

$u = f - f = 0$, $x \in \partial D$, $t \geq 0$

eftersom ekvationerna är linjära.

(a) $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t} E(t) = 0$ där $E(t) = \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + |\nabla u|^2 \right) dx\,dy$

För $t = 0$: $u = u_1 - u_2 = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$ och

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = \varphi_1 - \varphi_1 = 0$,

så $E(0) = \iint_D (0^2 + |\nabla 0|^2)\, dx\,dy = 0$.

Då E är konstant följer $E(t) = 0$ för $t \geq 0$.

Så för fixt $t > 0$: $\iint_D |\nabla u|^2 dx\,dy = 0$ speciellt.

$\Rightarrow u =$ konstant $= 0$ då $u = 0$ på ∂D.

$\therefore$ $u_1 - u_2 = 0$.

<u>2.12</u>: Betrakta först fallet $\varphi_0 = 1$. Vi har givet

(2.26) : Lösningen till

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_2 u \\ u = 0 \quad , t = 0 \qquad (*) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1 \quad , t = 0 \end{cases}$$

ges av $u(x_0, y_0, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < t^2} \frac{\varphi_1(x,y)\, dx\,dy}{\sqrt{t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}}$.

Hadamards method of descent innebär att

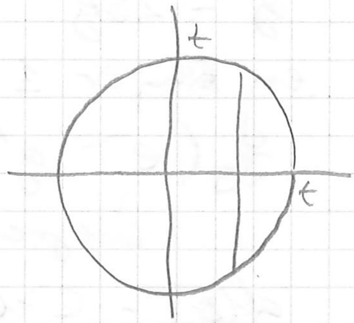
Vi betraktar 1D problemet
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u = 0 \quad , t = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(x) \, , \; t = 0 \end{cases}$$

som en y-oberoende lösning av (*).

Vi får

$$u(x_0,t) = u(x_0,0,t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{(x-x_0)^2+y^2<t^2} \frac{\varphi_1(x)\,dx\,dy}{\sqrt{t^2-(x-x_0)^2-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-t}^{x_0+t} \Bigg(\underbrace{\int_{-\sqrt{t^2-(x-x_0)^2}}^{\sqrt{t^2-(x-x_0)^2}} \frac{dy}{\sqrt{t^2-(x-x_0)^2-y^2}}} \Bigg) \varphi_1(x)\,dx$$



$$\Big/ \; y = \sqrt{t^2-(x-x_0)^2} \cdot s, \quad dy = \sqrt{} \cdot ds \; \Big/ \quad \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \pi$$

$$\therefore \; u(x_0,t) = \frac{1}{2} \int_{x_0-t}^{x_0+t} \varphi_1(x)\,dx$$

Detta är d'Alemberts formel då $\varphi_0 = 0$.

Om $\varphi_0 \neq 0$, får vi enligt ovan och (2.26) lägga till termen

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \int_{x_0-t}^{x_0+t} \varphi_0(x)\,dx \right) = \frac{1}{2}\big(\varphi_0(x_0+t) + \varphi_0(x_0-t) \big)$$

↑ analysens huvudsats.

3.1(e) Vi söker lösningar till $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$u'_t = -\frac{1}{2t^{3/2}} f - \frac{x}{4t^2} f'$$

$$u'_x = \frac{1}{2t} f'$$

$$u''_{xx} = \frac{1}{4t^{3/2}} f''$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2t^{3/2}} f - \frac{x}{4t^2} f' = \frac{1}{4t^{3/2}} f''$$

$$f'' + \frac{x}{\sqrt{t}} f' + 2f = 0$$

$$f''(s) + 2s\, f'(s) + 2f(s) = 0$$

En lösning känner vi väl: $f(s) = e^{-s^2}$

Kontroll: $2e^{-s^2}+2s(-2se^{-s^2})+(-2e^{-s^2}+4s^2e^{-s^2})=0.$

Övriga får vi genom reduktion till ODE av ordning 1 med byte av beroende variabel: $f(s)=g(s)\cdot e^{-s^2}$

$\Rightarrow f'=(g'-2sg)e^{-s^2}$, $f''=(g''-2g-2sg'-2sg'+4s^2g)e^{-s^2}$

$0=f''+2sf'+2f \Rightarrow$

$0=(g''-\cancel{2g}-4sg'+\cancel{4s^2g})+2s(g'-\cancel{2sg})+\cancel{2g}$

$g''=2sg'$ Denna saknar g-term och är en linjär 1:a ordningens ODE för g':

$$\frac{d}{ds}(\underbrace{e^{-s^2}}_{\text{integrerande faktor.}}g')=0$$

$$g'(s)=C\cdot e^{s^2}$$

$$g(s)=D+C\underbrace{\int_0^s e^{t^2}dt}_{\text{primitiven kan ej uttryckas med elementära funktioner.}}$$

Svar: Den allmänna lösningen är

$$f(s)=De^{-s^2}+C\cdot\int_0^s e^{t^2-s^2}dt$$

(b) Värmekärnan

$$H(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t} & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t\le 0\end{cases}$$

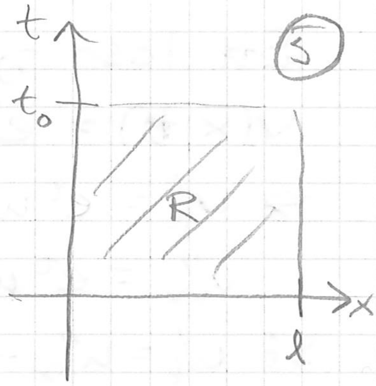
löser $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ och är bara obegränsad i origo.

PDEn $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ har konstanta koefficienter och är därför translationsinvariant.

$u(x,t)=H(x+1,t)$ är därför en lösning till $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ som är begränsad för $x\ge 1,\ -\infty<t<\infty$.

Svar: $u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(x+1)^2/4t} & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t\le 0\end{cases}$ är en sådan lösning.

3.4 Antag $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$
i R, och att u är kontinuerlig
på $\overline{R}$. Visa att om $f<0$
så antas u:s maximum på $\overline{R}$
på någon av de tre linjerna
$t=0$, $x=0$, $x=l$.



__Bevis:__ Om u antar max i det inre av R i (x,t)
så är $u'_t = u'_x = 0$
och $u''_{tt} \le 0$ och $u''_{xx} \le 0$ i (x,t).
Så $u'_t - u''_{xx} = 0 - u''_{xx} \ge 0$.
Detta motsäger $f<0$.
Om u antar max i någon punkt (x,t_0)
på övre randlinjen måste
$u'_t \ge 0$, $u'_x = 0$ och $u''_{xx} \le 0$
$\Leftrightarrow$ för $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{u(x,t_0-h)-u(x,t_0)}{-h} \ge \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{u(x,t_0)-u(x,t_0)}{-h} = 0$

Så igen $u'_t - u''_{xx} \ge 0-0=0$ vilket motsäger
$f<0$.
(Notera att vi i själva verket har visat den
starka maximumprincipen: $u'_t - u''_{xx} = f$ har
aldrig ett max för $0<x<l$ och $t>0$!)

3.15: Vi löser först den modifierade värmelednings-
ekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$ på hela axeln
$-\infty < x < \infty$. Fysikalisk tolkning av termen
$-u$: den värmeledande x-axeln är inbäddad
i en omgivning med temperatur 0 som
kyler staven (x-axeln) om $u>0$ och värmer den
om $u<0$.

Ett lösningsförfarande är att skriva

$v(x,t) = e^{t} u(x,t)$

$\Rightarrow v'_t = e^t u + e^t u'_t$

$v''_{xx} = e^t u''_{xx}$

Så $u'_t = u''_{xx} - u \iff v'_t - v = v''_{xx} - v$

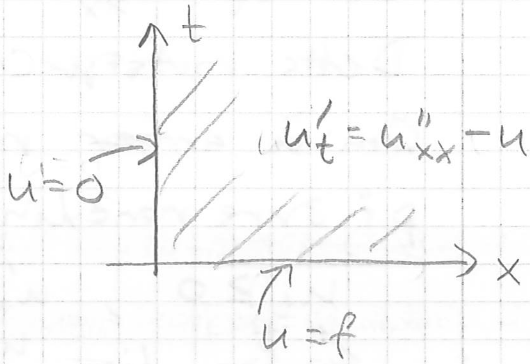
$\iff v'_t = v''_{xx}$ vanliga värmeledningsekv.

Med värmekärnen vet vi:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} v(y,0)\, e^{-(y-x)^2/4t}\, dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} u(y,0)\, e^{-(y-x)^2/4t}\, dy. \quad (*)$$

(a) För att lösa PDEproblemet i figuren, utvidgar vi f som en udda funktion på $\mathbb{R}$:



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Insatt i $(*)$ fås

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)\, e^{-(y-x)^2/4t}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t} \left(\int_0^{\infty} f(y)\, e^{-(y-x)^2/4t}\, dy - \int_0^{\infty} f(y)\, e^{-(y+x)^2/4t} \right)$$

Enligt ovan är $u'_t = u''_{xx} - u$ och $u(x,0) = \tilde{f}(x)$, så speciellt $u(x,0) = f(x)$ för $x > 0$.

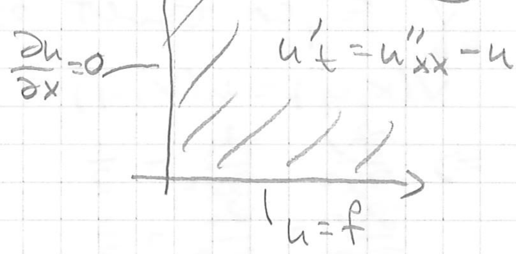
Av konstruktion blir också

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t} \int_0^{\infty} f(y) \left(e^{-y^2/4t} - e^{-y^2/4t} \right) dy = 0 \text{ för } t > 0.$$

Svar: Lösningen är

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t} \int_0^{\infty} f(y) \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} - e^{-(y+x)^2/4t} \right) dy$$

(b) Löses precis som i (a), men med jämn utvidgning



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ f(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Svar: Lösningen är
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-t} \int_0^\infty f(y) \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} + e^{-\frac{(y+x)^2}{4t}} \right) dy.$$

4.2: Antag att $u(x,y)$ löser
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 & \text{i } D, \\ u = 0 \text{ på } \partial D, \end{cases}$$

Vi vill visa $u = 0$ i hela D.

Analogt med härledningen av Greens formel, använder vi divergens-satsen på $u \cdot F$, där
$$F(x) = \left(e^x \frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\ e^y \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)$$

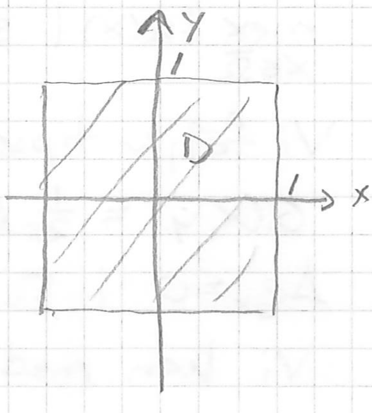
$$\Rightarrow \iint_D \underbrace{\operatorname{div}(uF)}_{= \nabla u \cdot F + u \underbrace{\operatorname{div} F}_{=0}} dx\,dy = \int_{\partial D} \underbrace{u}_{=0} \langle n, F \rangle \, dS$$

$$\Rightarrow \iint_D \left(e^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + e^y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy = 0$$

$\Rightarrow \nabla u = 0$ i hela D då $e^x > 0$ och $e^y > 0$.

Då vi antar att D är sammanhängande och $u = 0$ på ∂D följer att $u = 0$ i hela D.

4.6: Vi antar
$$\begin{cases} \Delta_2 u = -1 & \text{på kvadraten } D \\ u = 0 & \text{på } \partial D \end{cases}$$



och vill uppskatta $u(0,0)$ utan att exakt räkna ut värdet.

Vi följer tipset och skriver

$v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2+y^2)$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}$

Så $\begin{cases} \Delta v = \Delta u + 1 = 0 & \text{i } D \\ v = 0 + \frac{1}{4}(x^2+y^2) & \text{på } \partial D \end{cases}$

På randen är $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$ närmast origo, och $(\pm 1, \pm 1)$ är längst från origo.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq v \leq \frac{1}{2}$ på ∂D

Eftersom v är harmonisk i D, följer av maximumprincipen att

$$\frac{1}{4} \leq v(0,0) \leq \frac{1}{2}$$

Men $v(0,0) = u(0,0)$, så:

Svar: En uppskattning av $u(0,0)$ är

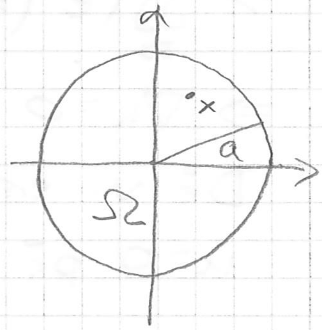
$$\frac{1}{4} \leq u(0,0) \leq \frac{1}{2}.$$

(En funktion s.a. $\Delta u \leq 0$ kallas superharmonisk ("över")

$\Delta u \geq 0$ kallas subharmonisk. ("under"))

4.30 Vi antar att

$\begin{cases} \Delta_2 u = g(x) & \text{i cirkelskivan } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$



och vill visa

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq a^2 \max_{x \in \overline{\Omega}} |g(x)|.$$

Vi följer tipset och betraktar Greensfunktionen

$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| + g_x(y)$, där

$\Delta g_x = 0$ i Ω och $g_x(y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y|$ för $y \in \partial\Omega$.

Vi kan med speglingsmetoden räkna fram g_x och G, men här kan det vara bättre att uppskatta g_x med max. principen analogt med förra uppgiften. ⑨

Då $G(x,y) \to -\infty$ då $y \to \overset{\text{fix}}{x} \in \Omega$ och $G = 0$ på $\partial\Omega$, visar max. principen att $G \leq 0$ för $x, y \in \Omega$.

Vi söker nu en undre uppskattning av $G(x,y)$:

$$g_x(y) \geq -\frac{1}{2\pi}\ln(|x|+|y|) \geq -\frac{1}{2\pi}\ln(2a) \quad \text{för } y \in \partial\Omega$$

Max. principen $\Rightarrow$

$$g_x(y) \geq -\frac{1}{2\pi}\ln(2a) \quad \text{för } y \in \Omega$$

$$\Rightarrow G(x,y) \geq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-y|}{2a}$$

$$|G(x,y)| \leq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{2a}{|x-y|}$$

För att uppskatta u använder vi Greens 2:a formel med u och $v(y) = G(x,y)$:

$$\iint_\Omega (u\underbrace{\Delta_y G}_{=\delta_x} - \underbrace{\Delta u}_{=\rho} \cdot G)\,dy = \int_{\partial\Omega} (\underbrace{u}_{=0}\frac{\partial G}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot \underbrace{G}_{=0})\,dS(y)$$

$$\Rightarrow u(x) = \iint_\Omega G(x,y)\rho(y)\,dy$$

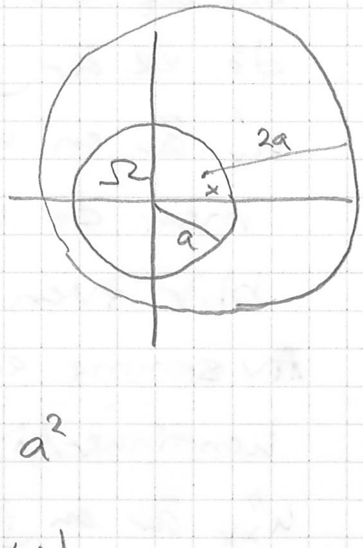
och för $x \in \Omega$ får vi uppskattningen

$$|u(x)| \leq \iint_\Omega |G(x,y)|\,|\rho(y)|\,dy$$

$$\leq \underbrace{\left(\iint_\Omega |G(x,y)|\,dy\right)}\cdot \max_{y\in\bar\Omega}|\rho(y)|$$

$$\leq \iint_{|y-x|\leq 2a} \frac{1}{2\pi}\ln\frac{2a}{|y-x|}\,dy$$

$$= \int_0^{2a} r\cdot\ln\frac{2a}{r}\,dr = \Big/ t = \ln\frac{2a}{r} \Big/$$

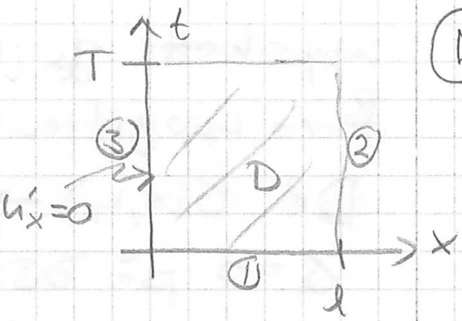


$$= \int_0^\infty \frac{2a}{e^t}\cdot t\,\frac{2a}{e^t}\,dt = (2a)^2\int_0^\infty t e^{-2t}\,dt$$

$$= (2a)^2\left(\left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2t}\,dt\right) = a^2$$

Vi har visat $\max_{x\in\bar\Omega}|u(x)| \leq a^2 \max_{x\in\bar\Omega}|\rho(x)|$.

3:3 (Ingick ej i inlämningen)



Antag $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i D och
$u \in C^2(\bar{D})$, samt
$u'_x(0,t)=0$.

Vi önskar visa att u:s max i $\bar{D}$ antas på randlinjerna ① och ②. Enligt den svaga max-principen antas maxet på ①, ② eller ③.

Vi använder tipset att spegla i t-axeln för att utesluta ③.

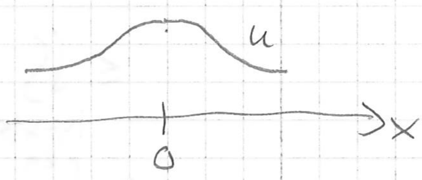
$$\text{Låt } v(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & , \; x \geq 0 \\ u(-x,t) & , \; x < 0 \end{cases}$$

Påstående: v är C^2 i området $\tilde{D}: -l \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T$ och $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ där.

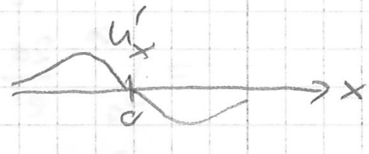
Maximumprincipen för u på $\tilde{D}$ visar att max antas på ① eller ②, eftersom ③ nu ligger i det inre av $\tilde{D}$.

Att $v'_t(x,t) = u'_t(-x,t) = u''_{xx}(-x,t) = (-1)^2 v''_{xx}(x,t)$ för $x<0$ är klart, så det återstår att visa $u \in C^2(\tilde{D})$, dvs att $u, u'_t, u'_x, u''_{tt}, u''_{tx}$ och u''_{xx} är kontinuerliga tvärs $x=0$.

u, u'_t och u''_{tt} är uppenbarligen kontinuerliga då de är jämna funktioner av x



u'_x är en udda funktion av x, men då $u'_x(0,t)=0$ antar blir även u'_x kontinuerlig.



Av samma anledning är $u''_{tx} = (u'_t)'_x$ kontinuerlig.

u''_{xx} är en jämn funktion av x och

väldefinierad i $x=0$ då u'_x är kontinuerlig,
och då höger- och vänsterderivator är lika
eftersom u'_x är udda.
Detta visar $u \in C^2(\tilde{D})$.

- Motsvarande bevis med distributionsteori:

  Låt v är jämn utvidgning av u som ovan.

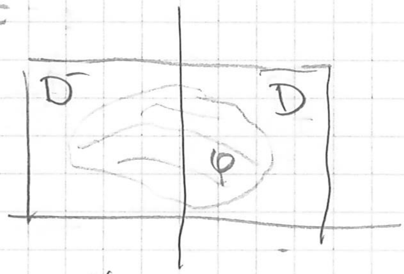
  Fråga: Gäller $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ i $\tilde{D}$ i distributionsmening?

  (Detta utesluter i så fall alla eventuella problem med singulariteter/språng vid $x=0$.)

  Vi behöver visa:

$$VL = -\iint_{\tilde{D}} v \cdot \varphi'_t \, dx\,dt = \iint v \cdot \varphi''_{xx} \, dx\,dt = HL$$

för alla $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{D})$



$\tilde{D} = D \cup D^-$

$$VL = -\iint_D u\varphi'_t - \underbrace{\iint_{D^-} v\varphi'_t}_{=\iint_D u(x,t)\,\varphi'_t(-x,t)}$$

$$= -\int_0^\ell \Bigg(\underbrace{\int_0^T u(x,t)\big(\varphi'_t(x,t) + \varphi'_t(-x,t)\big)\,dt}_{=-\int_0^T u'_t(x,t)\left(\varphi(x,t)+\varphi(-x,t)\right)dt} \Bigg) dx$$

$$HL = \int_0^T \Bigg(\underbrace{\int_0^\ell u(x,t)\big(\varphi''_{xx}(x,t) + \varphi''_{xx}(-x,t)\big)\,dx}_{} \Bigg) dt$$

$$= \Big[u\big(\underbrace{\varphi'_x(x,t) - \varphi'_x(-x,t)}_{=0}\big)\Big]_0^\ell - \int_0^\ell u'_x\big(\varphi'_x(x,t) - \varphi'_x(-x,t)\big)\,dx$$

$$= -\Big[\underbrace{u'_x}_{u'_x(0,t)=0 \text{ antages!}}\big(\varphi(x,t) + \varphi(-x,t)\big)\Big]_0^\ell + \int_0^\ell u''_{xx}\big(\varphi(x,t) + \varphi(-x,t)\big)\,dx$$

$$\therefore \; VL = HL = \iint_D \underset{\substack{\| \\ u''_{xx}}}{u'_t} \big(\varphi(x,t) + \varphi(-x,t)\big)\,dx\,dt,$$

vilket skulle visas.