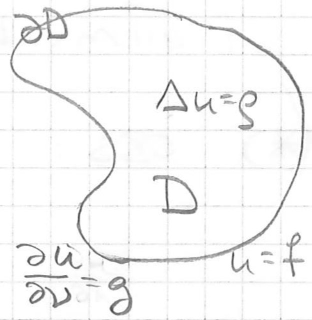
14:1 Randvärdesproblem och integralekvationer på ∂D

Greens 3:e formel:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(f(y) \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu(y)} - g(y)\,\Phi(y-x) \right) dS(y)$$
$$+ \int_D \rho(y)\,\Phi(y-x)\,dy \quad , x \in D$$



om $\Delta u = \rho$ i D och

$$u = f \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{på } \partial D.$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x| & n=2 \\ \frac{-1}{4\pi|x|} & n=3 \end{cases}$$

- Låt ρ vara godtycklig given funktion i D.
  Newtonpotentialen av ρ är
  $$V_0(x) := \int_D \rho(y)\,\Phi(y-x)\,dy \quad , x \in D.$$
  V_0 löser Poissons ekvation $\Delta V_0 = \rho$, men randvärden V_0, $\frac{\partial V_0}{\partial \nu}$ på ∂D vet vi inget om. Se DC kap. 4.7. för en ordentlig matematisk analys av varför $\Delta V_0 = \int_D \rho\,\Delta\Phi = \int_D \rho\,\delta_x = \rho(x)$.

- Låt f vara en godtycklig given funktion på ∂D.
  Dubbelskiktspotentialen av f är
  $$V_1(x) := \int_{\partial D} f(y) \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu(y)}\,dS(y) \quad , \quad x \in D.$$
  V_1 löser Laplaces ekvation $\Delta V_1 = 0$ i $D^{(*)}$ men V_1:s randvärden känner vi inte. Speciellt är inte $V_1 = f$ på ∂D i allmänhet.

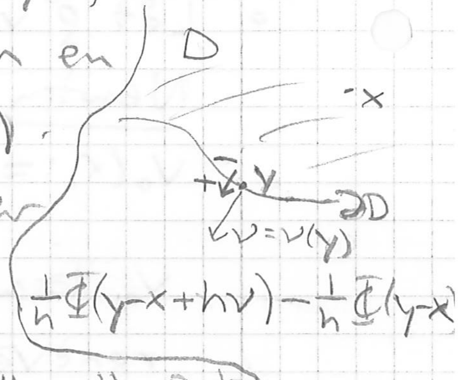
- Låt g vara en godtycklig given funktion på ∂D.
  Enkelskiktspotentialen av g är
  $$V_2(x) := \int_{\partial D} g(y)\,\Phi(y-x)\,dS(y) \quad , \quad x \in D.$$

V_2 är harmonisk i $D^{(*)}$, men V_2:s randvärden känner vi inte. Speciellt är <u>inte</u> $\frac{\partial V_2}{\partial \nu} = g$ på ∂D i allmänhet.

(*) OBS:
$$\Delta_x \Phi(y-x) = 0$$
$$\Delta_x \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu(y)} = \Delta_x\big(\nu(y)\cdot\nabla_y \Phi(y-x)\big) = \nu(y)\cdot\nabla_y\big((\Delta_x \Phi)\big)(y-x) = 0$$
för $x \in D$ och fixt $y \in \partial D$.

<u>Terminologi från fysiken:</u>

I 3D: $\Phi(y-x) = \frac{-1}{4\pi|y-x|}$ är den elektriska potentialen från en punktladdning i y, medan $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)}(y-x)$ är potentialen från en elektrisk dipol i y med riktning $\nu(y)$. g respektive f tolkas som densiteter av monopoler / dipoler över ∂D.



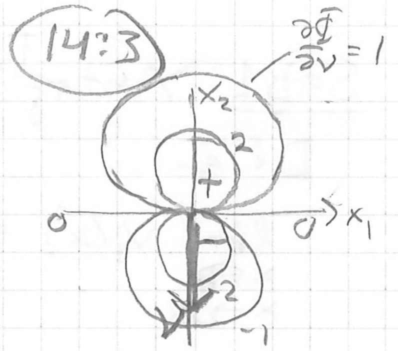
$$\frac{1}{h}\Phi(y-x+h\nu) - \frac{1}{h}\Phi(y-x)$$

Hur löser vi Dirichletproblemet för ett allmänt givet område D?

- Översätter till det inhomogena problemet $\begin{cases} \Delta u = -\tilde{f} & \text{i } D \\ u = 0 & \text{på } \partial D \end{cases}$, variationsformulerar och löser med FEM.
- Greens metod: Korrigerar Φ till Greensfunktionen G, vilket eliminerar enkelskiktstermen. Detta fungerar i praktiken bara för geometriskt enkla områden D.
- <u>Randintegralekvationer</u>: Vi behåller Φ och korrigerar dipolsdensiteten f. Sök f så att V_1 har önskade randvärden.

<u>Exempel</u>: I $\mathbb{R}^2$ är dipolpotentialen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{1}{2\pi}\,\nu(y)\cdot\frac{y-x}{|y-x|^2}$$



Antag $\nu=(0,-1)$, $y=(0,0)$ och skissa nivåkurvor:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{1}{4\pi C} \iff$$

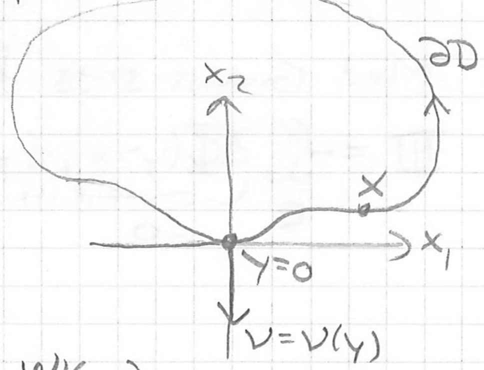
$$\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} = \frac{1}{2C} \iff x_1^2+(x_2-C)^2 = C^2$$

Nivåkurvor är cirklar som tangerar x-axeln i origo $= y$.

Notera: $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ är inte singulär när $x\to y=0$ längs x-axeln (ortogonalt mot ν)

$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\to\pm\infty$ när $x\to y=0$ längs y-axeln (parallellt med ν).

Antag nu ∂D i närheten av $y=0$ ges av $x_2=\varphi(x_1)$.



Enligt l'Hospitals regel:

$$\lim_{x_1\to0}\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu} = \lim_{x_1\to0}\frac{1}{2\pi}\,\frac{\varphi(x_1)}{(\varphi(x_1))^2+x_1^2}$$

$$=\lim_{x_1\to0}\frac{1}{4\pi}\,\frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)\varphi'(x_1)+x_1} = \lim_{x_1\to0}\frac{1}{4\pi}\,\frac{\varphi''(x_1)}{\varphi'(x_1)^2+\varphi(x_1)\varphi''(x_1)+1}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\varphi''(x_1).$$

Detta visar att om ∂D är en slät kurva (så att φ'' existerar) så är

$K(x,y)=\nu(y)\cdot\nabla\Phi(y-x)$ kontinuerlig för $x,y\in\partial D$.

Men då $x\in D$ ligger nära, men ej på, ∂D är $K(x,y)$ diskontinuerlig!

Sats 1: Antag f är en kontinuerlig funktion på ∂D. (Slät kurva i $\mathbb{R}^2$) **14:4**

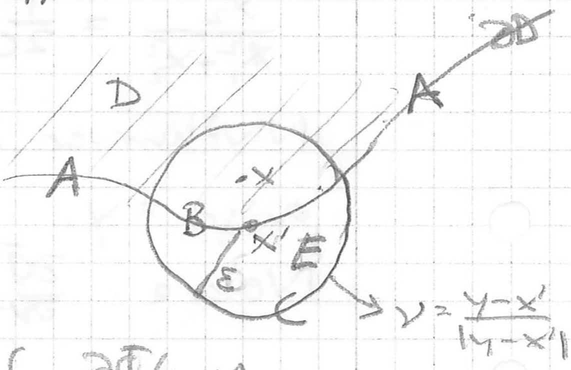
Då är

$$\lim_{\substack{x\in D\\ x\to x'}} V_1(x) = \frac{1}{2} f(x') + \int_{\partial D} f(y)\frac{\partial\Phi(y-x')}{\partial\nu(y)}\,dS(y), \quad x'\in\partial D$$

och

$$\lim_{\substack{x\in\mathbb{R}^2\setminus D\\ x\to x'}} V_1(x) = -\frac{1}{2} f(x') + \int_{\partial D} f(y)\frac{\partial\Phi(y-x')}{\partial\nu(y)}\,dS(y), \quad x'\in\partial D$$

Bevis: Låt $\varepsilon>0$ och skriv



$$V_1(x) = \int_{\substack{y\in\partial D\\ |y-x'|>\varepsilon}} f(y)\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu(y)}\,ds \; +$$

$A = \{y\in\partial D,\ |y-x'|>\varepsilon\}$

$$+\int_{\substack{y\in\partial D\\ |y-x'|<\varepsilon}} \left(f(y)-f(x')\right)\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu(y)}\,ds + f(x')\int_{\substack{y\in\partial D\\ |y-x'|<\varepsilon}} \frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu(y)}\,ds$$

$B = \{y\in\partial D,\ |y-x'|<\varepsilon\}$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + f(x')\cdot\mathrm{III}$$

Med Gauss sats får vi

$$\mathrm{III} = -\iint_E \underbrace{\Delta\Phi(y-x)}_{=0}\,dy + \int_{\substack{|y-x'|=\varepsilon\\ y\notin D}} \underbrace{\frac{y-x'}{|y-x'|}\cdot \overbrace{\nabla\Phi(y-x)}^{=\frac{1}{2\pi}\frac{y-x}{|y-x|^2}}}_{=\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \to \frac{\text{längd av } C}{2\pi\varepsilon}$$

$\{|y-x'|=\varepsilon,\ y\notin D\} = C$, $\frac{y-x'}{|y-x'|} = \nu$ på C

då $x\to x'$

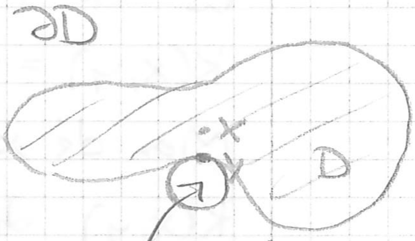
II: Om ε är litet, så är $|f(y)-f(x')|$ litet på B.

$\int\left|\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu}\right|ds$ kan ej bli stor, ty

$$\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds = \iint_D \Delta\Phi\,dy = 1 \quad \text{och}$$

$$\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu} \geq -C \quad \text{för alla } x\in D,\ y\in\partial D$$

C positiv konstant.



Området då $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \leq -C$. Se exempel ovan.

Så: Om $\varepsilon\approx 0$ och $x\approx x'$, är

$$\mathrm{I} \approx \int_{\partial D} f(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x')\,ds$$

$$\mathrm{II} \approx 0$$

och $III \approx f(x') \cdot \frac{1}{2}$.
På liknande sätt vises den andre formeln $\square$

Algoritmen för Dirichletproblemet i D:
Givne randdata $g : \partial D \to \mathbb{R}$. Vi söker $u : D \to \mathbb{R}$
med $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D \\ u = g & \text{på } \partial D \end{cases}$
Tag hjälpfunktion $f : \partial D \to \mathbb{R}$ och låt

$$u(x) = \int_{\partial D} f(y) \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu(y)} \, dS(y), \quad x \in D \qquad (*)$$

Lös integralekvation på ∂D:

$$\frac{1}{2} f(x') + \int_{\partial D} f(y) \frac{\partial \Phi(y-x')}{\partial \nu(y)} \, dS(y) = g(x'), \quad x' \in \partial D.$$

Givet g finner vi f och kan beräkna u med $(*)$.

Neumannproblemet löses analogt med enkelskiktspotentialer. Liknande satsen ovan vises följande.

Sats 2: Låt V_2 vara enkelskiktpotentialen av en kontinuerlig funktion $f : \partial D \to \mathbb{R}$. Då är

$$\nu(x') \cdot \lim_{\substack{x \in D \\ x \to x'}} \nabla V_2(x) = -\frac{1}{2} f(x') + \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x'-y)}{\partial \nu(x')} f(y) \, dS(y)$$

och

$$\nu(x') \cdot \lim_{\substack{x \in \mathbb{R}^2 \setminus D \\ x \to x'}} \nabla V_2(x) = \frac{1}{2} f(x') + \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x'-y)}{\partial \nu(x')} f(y) \, dS(y), \quad x' \in \partial D$$

Definition: Dubbelskiktpotentialen på ∂D är integraloperatorn

$$Kf(x) = \int_{\partial D} \underbrace{\nabla \Phi(y-x) \cdot \nu(y)}_{= \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu(y)}} f(y) \, dS(y), \quad x \in \partial D$$

verkande på funktioner på ∂D.

Vi noterar: 14:6

- Adjunkten (dualen) till K är

$$K^*f(x) = \int_{\partial D} \underbrace{\nu(x)\cdot\nabla\Phi(x-y)}_{=\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(x)}} f(y)\, dS(y).$$

Detta pga

$$\int_{\partial D} g(x)\left(\int_{\partial D}\nabla\Phi(y-x)\cdot\nu(y) f(y)\, dS(y)\right) dS(x)$$

$$= \int_{\partial D}\left(\int_{\partial D}\nu(y)\cdot\nabla\Phi(y-x)\, g(x)\, dS(x)\right) f(y)\, dS(y).$$

- Vi har följande integralformuleringar:

Dirichletproblemet i D: $\frac{f}{2} + Kf = g$

——— " ——— i $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$: $-\frac{f}{2} + Kf = g$

Neumannproblemet i D: $-\frac{f}{2} + K^*f = g$

——— " ——— i $\mathbb{R}^2\setminus D$: $\frac{f}{2} + K^*f = g$

Tex.

Algoritmen för Neumannproblemet i D:

Givna randdata $g: \partial D \to \mathbb{R}$. Vi söker $u: D \to \mathbb{R}$ som löser

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{på } \partial D. \end{cases}$$

Tag hjälpfunktion $f: \partial D \to \mathbb{R}$ och låt

$$u(x) = \int_{\partial D} f(y)\,\Phi(y-x)\, dS(y), \quad x \in D \qquad (*)$$

Lös integralekvation på ∂D:

$$-\frac{1}{2}f(x') + \int_{\partial D} f(y)\frac{\partial\Phi(x'-y)}{\partial\nu(x')}\, dS(y) = g(x'), \quad x' \in \partial D.$$

Givet g finner vi f och beräknar u med (*).

Lite Fredholmteori för integralekvationer:

Vi abstraherar: Låt T vara en linjär operator på ett Hilbertrum H som är kontinuerlig, dvs $\|Tf\| \leq \underbrace{C}_{\text{konstant } <\infty} \cdot \|f\|$ för $f \in H$.

Tänk: $H = L_2(\partial D) = \{ f : \partial D \to \mathbb{R} \,;\, \int_{\partial D} |f(x)|^2 dS(x) < \infty \}$ och $T = I \pm K$. (I = identitetsop: $If = f$.)

Vi är intresserade av existens och entydighet av lösningar f till ekvationen $Tf = g$.

- Fallet då $H = \mathbb{R}^n$ är ändligdimensionellt:

Vi ser nu T som en $n \times n$ matris, med transponat/adjunkt T^*. Skriv $x = f$ och $y = g$ för vektorerna.

Att $Tx = y$ är lösbar för alla g betyder att bildmängden $R(T) = \{Tx \,;\, x \in \mathbb{R}^n\}$ är hela $\mathbb{R}^n$.

Att lösningar f är entydiga betyder att nollrummet $N(T) = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Tx = 0\}$ är $\{0\}$.

<u>Dimensionsatsen</u> visar att

$$n - \dim R(T) = \dim N(T).$$

Speciellt är $Tx = y$ lösbar för alla y om och endast om lösningar x till $Tx = y$ är entydiga.

Notera att $n - \dim R(T)$ är dimensionen av ortogonala komplementet

$$R(T)^\perp = \{ z \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle z, Tx \rangle = 0 \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n \}$$

Villkoret att $Tx = y$ är lösbart blir att $\langle y, z \rangle = 0$ för alla $z \in R(T)^\perp$.

Lemma: $R(T)^\perp = N(T^*)$

Bevis: $z \in R(T)^\perp \Leftrightarrow \langle z, Tx\rangle = 0,\ \forall x$

$\Leftrightarrow \langle T^*z, x\rangle = 0,\ \forall x \Leftrightarrow T^*z = 0$ □

Det följer att alla fyra underrummen

$N(T)$, $R(T)^\perp$, $N(T^*)$, $R(T^*)^\perp$

har samma dimension.

Speciellt: Om $Tx=0$ bara har lösningen $x=0$ (dvs $N(T)=\{0\}$), så är $Tx=y$ och $T^*\tilde{x}=\tilde{y}$ båda entydigt lösbara för alla högerled (dvs $R(T)=\mathbb{R}^n$ och $R(T^*)=\mathbb{R}^n$).

- Fallet då H är ett oändligdimensionellt Hilbertrum, t ex $H=L_2(\partial D)$.

Det fundamentalt nya är att $R(T)$ (och $R(T^*)$) inte i allmänhet är ett slutet underrum.

Definition: $T: H \to H$ är en Fredholmoperator om $R(T)$ är ett slutet underrum av H, (dvs om $\|Tf_k - y\| \to 0$ så finns $x \in H$ s.a. $y = Tx$) och om $\dim N(T) < \infty$ och $\dim R(T)^\perp < \infty$.

Ytterligare en nyhet i fallet $\dim H = \infty$ är att dimensionsatsen inte är sann, i bemärkelsen att det finns Fredholmoperatorer s.a. $\dim R(T)^\perp \neq \dim N(T)$.

Ett viktigt fall då inte sådana problem uppstår är då

$T = I + K$

och K är "liten".

Om K är liten i betydelsen att $\|K\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} < 1$ så är $I+K$ till och med (14.19)

inverterbar: $(I+K)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^j$ är konvergent!

Denna Taylorserie då K är en operator kalles Neumannserie.

Dubbelskiktspotentialen K på ∂D är dock inte liten i denna mening, utan i betydelsen att K är en kompakt operator.

Definition: K är kompakt om det finns en följd av operatorer T_j med $\dim R(T_j) < \infty$ så att $\lim_{j \to \infty} \|K - T_j\| = 0$.

Intuitivt betyder detta att K bara är stor i ändligt många dimensioner.

Sats: Om D är ett begränsat område med slät rand ∂D så är

$$K: L_2(\partial D) \to L_2(\partial D)$$

en kompakt operator.

Men allmänt är en integraloperator

$$Kf(x) = \int_{\partial D} k(x,y) f(y)\, dS(y)$$

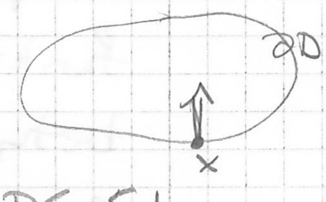
kompakt på $L_2(\partial D)$ om dess kärna, dvs funktionen $k(x,y)$ är svagt singulär i betydelsen att $|k(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^\alpha}$ för någon exponent $\alpha <$ dimensionen av ∂D.

Men kan vidare visa att då K är en kompakt operator så är
$\frac{I}{2}+K$, $\frac{I}{2}-K$, $\frac{I}{2}+K^*$, $\frac{I}{2}-K^*$ ($\frac{1}{2}$:an är bara en "teknikalitet")
alla Fredholmoperatorer T med
$\dim R(T)^\perp = \dim N(T)$.

Speciellt följer det så kallade Fredholm-alternativet: Om $\frac{1}{2}f + Kf = 0$ endast har $f=0$ som lösning, så är ekvationen $\frac{1}{2}f + Kf = g$ entydigt lösbar för alla $g \in L_2(\partial D)$!
Att välställdhet (speciellt existens och kontinuitet) följer av entydigheten enbart bör betraktas som ett uppseendeväckande resultat.

Exempel 1: Vi ska visa att $\frac{1}{2}f + K^*f = 0$ endast har lösningen $f=0$ om D och $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ båda är sammanhängande områden.
Teorin ovan visar att $\frac{1}{2}I+K$ och $\frac{1}{2}I+K^*$ är inverterbara operatorer, som kan användas för att lösa Dirichletproblemet på D, respektive Neumannproblemet på $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.
Antag därför $\frac{1}{2}f + K^*f = 0$. Först noterar vi att

$$K1(x) = \int_{\partial D} \nabla\Phi(y-x)\cdot\nu(y)\, 1\, ds(y) = \iint_D \underbrace{\Delta\Phi}_{=\delta}(y-x)\, dy = \frac{1}{2}, \quad x\in\partial D$$



Formellt integrerar vi genom "halva Dirac-deltat" då $x \in \partial D$. Ett rigoröst bevis av denna Gaussformel finns i DC. 5.1.

Genom att integrera $\frac{1}{2}f + K^*f = 0$ över ∂D

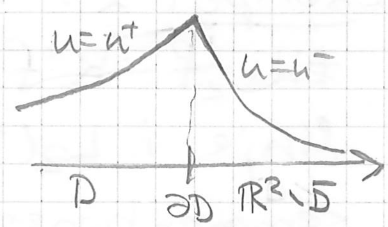
får vi $\frac{1}{2}\int_{\partial D} f\,ds + \underbrace{\int_{\partial D} 1 \cdot K^* f(x)\,ds}_{= \int_{\partial D} \underbrace{K1(x)}_{=1/2} f(x)\,ds(x)} = \int_{\partial D} f\,ds = 0.$

14:11

Betrakta nu enkelskikts potentialen

$$u(x) := \int_{\partial D} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|\,ds(y).$$

Vi har $\Delta u(x) = 0$ då $x \notin \partial D$ och då logaritmen är svagt singulär kan man visa att u är kontinuerlig över ∂D.



Låt u^+ beteckna u i D,

och låt u^- beteckna u i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

Enligt sats 2 har vi på ∂D:

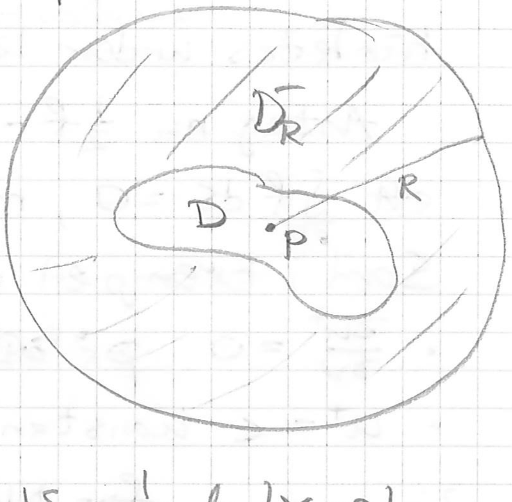
$$\begin{cases} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = -\frac{1}{2} f + K^* f \\ \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = +\frac{1}{2} f + K^* f \end{cases}$$

Vårt antagande är att $\frac{\partial u^-}{\partial \nu} = 0$ på ∂D.

Vi använder Greens 1:a formel på området

$D_R^- := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D};\ |x-p| < R\}$ $\quad p \in D$ fix

$$\int_{D_R^-} |\nabla u^-|^2\,dy = \int_{|x|=R} u^- \frac{\partial u^-}{\partial r}\,ds(y) - \int_{\partial D} u^- \underbrace{\frac{\partial u^-}{\partial \nu}}_{=0}\,ds(y)$$



Men då $\int_{\partial D} f\,ds = 0$ är

$$u^-(x) = \int_{\partial D} f(y) \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|\,ds - \underbrace{\int_{\partial D} f\,ds}_{=0} \cdot \frac{1}{2\pi} \ln|x-p|$$

$$= \int_{\partial D} f(y) \frac{1}{2\pi} \underbrace{\ln \frac{|x-y|}{|x-p|}}_{\to 0 \text{ då } |x| \to \infty} ds$$

Vi visar från detta att

$$\int_{|x|=R} u^- \frac{\partial u^-}{\partial r}\,ds \to 0 \quad \text{då } R \to \infty.$$