Vi får $\Delta u^- = 0$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, u^- konstant $= 0$

14:12

då $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ är sammanhängande och $\lim_{x\to\infty} u^- = 0$.

Kontinuitet visar att

$u^+ = 0$ på ∂D. Entydighet (via Green eller maximumprincip) visar $u^+ = 0$ i hela D,

speciellt $\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0$ på ∂D. Sats 2 ger nu

$f = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0 - 0 = 0$, vilket skulle visas.

Exempel 2: Vi ska visa att lösningarna till $\frac{1}{2}f - K^*f = 0$ bildar en 1-dimensionell linje i $L_2(\partial D)$, om D och $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ är sammanhängande områden.

Teorin visar att $\frac{1}{2}f - Kf = g$ och $\frac{1}{2}f - K^*f = g$ kan lösas under ett (ortogonalitets-) villkor på g, och lösbarhet av Dirichletproblemet på $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ och Neumannproblemet på D kan härledas under lämpliga villkor. Se D.C. kap. 5.3.

Antag nu $\frac{1}{2}f - K^*f = 0$. Det följer nu inte att $\int_{\partial D} f\,ds = 0$, men antag först att så är fallet.

Som i Exempel följer

- $\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = 0$ på ∂D, per antagande
- $u^+ = c$ konstant i D av entydighet för Neumannproblemet (Greens 1:a)
- $u^- = c$ på ∂D av enkelskiktets kontinuitet.
- $u^- \to 0$ i ∞ av antagandet $\int_{\partial D} f\,ds = 0$.
- $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}} |\nabla u^-|^2 dy = -\int_{\partial D} u^- \frac{\partial u^-}{\partial \nu} ds = -c \int_{\partial D} \frac{\partial u^-}{\partial \nu} ds = 0$

  då $f = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}$ och $\int_{\partial D} f\,ds = 0$.

Vi får att $u^- = c = 0$ i hela $\mathbb{R}^2 \setminus D$, speciellt $f = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} = 0$ på ∂D.

Om $\int_{\partial D} f\,ds \neq 0$, finns $f = f_0 \neq 0$ s.a.

$$\tfrac{1}{2} f_0 - K^* f_0 = 0.$$

Detta följer av teorin eftersom $f = 1$ konstant löser $\frac{1}{2} f - K f = 0$.

Antag nu $f \in L_2(\partial D)$ löser $\frac{1}{2} f - K^* f = 0$.

Låt $\tilde{f} := f - \alpha \cdot f_0$ där

$$\alpha := \int_{\partial D} f\,ds \Big/ \int_{\partial D} f_0\,ds.$$

Då är $\int_{\partial D} \tilde{f}\,ds = 0$ och av ovan följer $\tilde{f} = 0$ eftersom $\frac{1}{2}\tilde{f} - K^* \tilde{f} = 0$.

Detta visar att lösningsmängden till $\frac{1}{2} f - K^* f = 0$ är linjen i H med "riktningsvektor" f_0.

<u>Från teori till praktik:</u>

Integralekvationerna ovan med $I \pm K$ och $I \pm K^*$ är rättframma att lösa numeriskt: Vi ersätter $L_2(\partial D)$ med ett ändligdimensionellt rum av t.ex. styckvis konstanta eller linjära funktioner och K ersätts med en ändlig kvadratisk matris.

En jämförelse med Finite element metoden:

1. Integralekvationerna behöver bara en diskretisering av en kurva, medan FEM behöver en diskretisering av D, som är två-dimensionellt.

$\Rightarrow$ Med avstånd t.ex. $h = 0{,}01$ mellan punkter ger Integralekv. en 100×100 matris ungefär medan FEM ger en 10000×10000 matris ungefär!

14:14

2. Dock är FEM typiskt gles (mest 0:or). Integralmatriserna är täta (inga 0:or i princip). Det finns dock snabba algoritmer som exploaterar "slätheten" hos dubbelskiktspotentialen $\frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial \nu(y)}$.

3. Det är problematiskt att lösa randvärdes-problem i det obegränsade området $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ med FEM. Inga problem alls med integralekvationer.