Inlämningsuppgifter omgång 1

Välskrivna, gärna för hand, lösningar lämnas in på föreläsning måndag 3/12.

Colton:

1.2(a) Finn allmänna lösningen till

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} - x^2\frac{\partial u}{\partial y} - yu = xy$$

1.9 Reducera följande PDE till kanonisk form.
(andra ordningens termer = $u''_{xx} + u''_{yy}$, u''_{xx} eller u''_{xy})

(a) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$

1.10(a) Som för 1.9:

$$(1+x^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Johnson:

2.10: 4:e ordningens 1D randvärdesproblem:

$$(D)\begin{cases} \frac{d^4 u}{dx^4} = f \qquad 0<x<1 \\ u(0) = -u''(0) + \gamma u'(0) = 0, \quad u(1) = u''(1) + \gamma u'(1) = 0 \end{cases}$$

då $\gamma > 0$ är en given konstant.

Finn en variationsformulering av (D):

$$(V)\begin{cases} u \in V \text{ sådan ~~att~~} \\ a(u,\varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in V. \end{cases}$$

Visa att: ↓

(a) (D) $\Longleftrightarrow$ (V)

(b) a är elliptisk, kontinuerlig (begränsad), symmetrisk, bilinjär

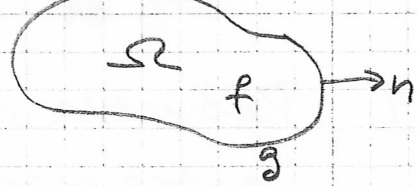
L är linjär, kontinuerlig

V är ett Hilbertrum

Vilka av de 4 randvillkoren är essentiella respektive naturliga?

2.6: Robins randvärdesproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \gamma u = g & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$



Samma uppgift som i 2.10.

Folland:

9.1.7: Visa att $|x|^2 \Delta \delta = 2n\delta$ i distributionsmening i $\mathbb{R}^n$. (δ = Dirac-deltat)

9.2.8: Visa att

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} x^{\varepsilon} H(x) \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon x^{\varepsilon - 1} H(x)$$

existerar i distributionsmening och bestäm gränsdistributionerna. Motivera noga.

9.5.5 Låt F vara en distribution på $\mathbb{R}$. Om $g(s)$ är en envariabelfunktion, kan vi definiera tvåvariabelfunktionen $u(x,t) := g(x-t)$, som har linjerna $t = x + C$ som nivåkurvor.

(a) Ge en definition av distributionen "$F(x-t)$" på $\mathbb{R}^2$.

(b) Visa att denna distribution på $\mathbb{R}^2$ löser vågekvationen $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ i distributionsmening.

SLUT