MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690
2019-01-17, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Henrik Imberg, ankn. 5325

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget VG, inklusive bonus.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Bestäm $u(x,y)$ som löser ekvationen
$$u'_x + 2xy^2 u'_y = x^3 y^2$$
och uppfyller $u(0,y) = 0$ för $y > 0$. (7p)

2. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen och begränsad mängd i planet med slät rand ∂D.
   (a) Definiera funktionsrummet $H^1(D)$. Förklara varför $H^1(D)$ är ett Hilbertrum. (2p)
   (b) Låt f vara en kontinuerlig funktion på $\overline{D} = D \cup \partial D$ och antag att $u \in C^2(\overline{D})$ löser variationsproblemet
   $$\int_D (\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + u\phi) dx = \int_D f\phi dx$$
   för alla $\phi \in H^1(D)$. Härled det randvärdesproblem som u löser, det vill säga en differentialekvation i D och ett randvillkor på ∂D. Visa att variationsproblemet och randvärdesproblemet är ekvivalenta för $u \in C^2(\overline{D})$. (4p)
   (c) Förklara varför randvillkoret i (b) är naturligt. (1p)

3. Betrakta funktionen $u(t,x)$ som löser $u''_{tt} = \Delta u$ för $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, med startvillkoren $u(0,x) = 0$ och
$$u'_t(0,x) = \begin{cases} 1 - |x|^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$
Beräkna $u(t,0)$ för alla $t > 0$
   (a) i dimension $n = 1$, (3p)
   (b) i dimension $n = 2$, och (3p)
   (c) i dimension $n = 3$. (3p)

4. (a) Definiera rummet $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ av distributioner på $\mathbf{R}$. (2p)

   (b) Beräkna derivatan $u' \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ av den distribution som ges av

$$u[\phi] = \int_0^1 (1-x)\phi(x)dx, \qquad \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

   Skissa u'. (3p)

   (c) Undersök om $\lim_{n\to\infty} n^3 \sin(nx)$ existerar i distributionsmening och beräkna i så fall gränsvärdet. (3p)

5. (a) Bestäm en Greensfunktion för övre halvplanet

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x \in \mathbf{R}, y > 0\},$$

   till exempel genom spegling i $y = 0$. (4p)

   (b) Använd denna Greensfunktion för att lösa Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & y > 0, \\ u(x,0) = 1, & 1 < x < 5, \\ u(x,0) = 0, & x \le 1 \text{ eller } x \ge 5. \end{cases}$$

   (3p)

6. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ och $0 < T < \infty$.

   (a) Formulera och bevisa den svaga maximumprincipen för värmelednings-ekvationen $u_t' = \Delta u$ på området $D \times (0,T)$. (4p)

   (b) Antag att

$$\begin{cases} u_t'(t,x,y) = \Delta u(t,x,y), & (x,y) \in D, t > 0, \\ u(t,x,y) = 0, & (x,y) \in \partial D, t > 0, \\ 0 \le u(0,x,y) \le \sin x \sin y, & (x,y) \in D. \end{cases}$$

   Visa att $0 \le u(t,x,y) \le e^{-2t} \sin x \sin y$ för alla $(x,y) \in D$ och $t > 0$. (3p)

7. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat och enkelt sammanhängande område i planet med slät rand.

   (a) Definiera dubbelskiktspotentialen i D, av en funktion h på ∂D. (1p)

   (b) Ange randvärdena på ∂D av din dubbelskiktspotential i (a). (1p)

   (c) Beskriv algoritmen för att lösa Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } D, \\ u = f & \text{på } \partial D, \end{cases}$$

   med dubbelskiktspotentialer. (3p)