(1) Karakteristisk ekvation är

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Lösning som separabel ODE:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C \iff x^2 + \frac{1}{y} = C$$

Lämpligt variabelbyte är

$$\begin{cases} s = x^2 + \frac{1}{y} \\ t = x \end{cases}$$

då de karakteristiska kurvarna då motsvarar $s =$ konstant.

Notera att $(x,y) \mapsto (s,t)$ är inverterbar för $y>0$.

Kedjeregeln:

$$\begin{cases} u'_x = 2x\, u'_s + 1 \cdot u'_t \\ u'_y = -\frac{1}{y^2} u'_s + 0 \end{cases}$$

PDEn blir:

$$(\cancel{2x u'_s} + u'_t) + 2xy^2\left(\cancel{-\frac{1}{y^2} u'_s}\right) = x^3 y^2$$

$$u'_t = x^3 y^2 = t^3 \frac{1}{(s-t^2)^2}$$

$$u(s,t) = \int t^2 \frac{t}{(s-t^2)^2}\,dt = t^2 \frac{\frac{1}{2}}{s-t^2} - \int \frac{t}{s-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^2}{s-t^2} + \frac{1}{2}\ln(s-t^2) + C(s)$$

godtycklig funktion.

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}\ln y + C\left(x^2 + \frac{1}{y}\right)$$

C bestäms genom att sätt $x=0$:

$$0 = u(0,y) = -\frac{1}{2}\ln y + C\left(\frac{1}{y}\right), \quad \forall y>0$$

$$\therefore C(\xi) = -\frac{1}{2}\ln \xi, \quad \forall \xi > 0$$

<u>Svar</u>: $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}\ln(x^2 y + 1)$

förenkling!

(2) (a) $H^1(D) := \{u \in L_2(D) \; ; \; u'_{x_i} \in L_2(D), \; i=1,\dots,n\}$ (2)

där $u'_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ är distributionsderivatan, som vi kräver är en funktion

$u'_{x_i} \in L_2(D) := \{(\text{Lebesguemätbar}) \; f : D \to \mathbb{R} \; ; \; \int_D |f(x)|^2 dx < \infty\}$

Normen $\|u\|_{H^1}$ ges av en skalärprodukt

$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^1}}$ där

$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_D (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + uv) \, dx.$

Pga detta och att $H^1(D)$ är fullständigt i bemärkelsen att varje Cauchyföljd konvergerar mot en gränsfunktion i $H^1(D)$ säger vi att $H^1(D)$ är ett Hilbertrum.

(b) Antag u löser variationsproblemet (V).

Green $\Rightarrow$

$$(*) \int_D f \varphi \, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi \, ds + \int_D (-\Delta u + u) \varphi \, dx \quad , \forall \varphi \in H^1(D).$$

Välj först $\varphi \in C_0^\infty(D)$ som konvergerar svagt

$\hookrightarrow 0$ på ∂D!

mot Diracdeltat δ_{x_0}, givet $x_0 \in D$.

Detta visar

$$f(x) = \int_D f \, \delta_{x_0} \, dx = 0 + \int_D (-\Delta u + u) \, \delta_{x_0} \, dx = -\Delta u(x_0) + u(x_0)$$

Då $-\Delta u + u = f$ identiskt i D ger $(*)$:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi \, ds = 0 \quad , \forall \varphi \in H^1(D).$$

P.s.s. genom att ta $\varphi \to \delta_{y_0}$, $y_0 \in \partial D$, följer av detta att $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ identiskt på ∂D.

$\therefore$ Randvärdesproblemet blir:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & i \; D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0. & på \; \partial D \end{cases}$$

Omvänt, om u löser randvärdesproblemet ger Green: (3)

$$\int_D (\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + u\varphi)\,dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\cdot \varphi \, dS + \int_D (-\Delta u + u)\varphi \, dx$$

$$= 0 + \int_D f\varphi\, dx \text{ , så } u \text{ löser då (V).}$$

(c) Neumanns randvillkor är naturligt då det inte förekommer i definitionen av funktionsrummet $H^1(D)$ för (V).

3 (a) Enligt d'Alembert formel:

$$u(t,0) = \frac{1}{2}\big(u(0,t) + u(0,-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} u_t'(0,s)\,ds$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}(1-s^2)\,ds$$

$$= \int_0^t (1-s^2)\,ds = t - \frac{t^3}{3} \quad \text{om } t<1$$

Om $t>1$:

$$u(t,0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u_t'(0,s)\,ds = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{konstant.}$$

(b) Vår lösningsformel är nu

$$u(t,0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|x|<t} \frac{u(0,x)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\,dx + \frac{1}{2\pi}\iint_{|x|<t}\frac{u_t'(0,x)}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_0^t \frac{1-r^2}{\sqrt{t^2-r^2}}\,\cancel{2\pi}\, r\,dr$$

$$= \Big[(1-r^2)(-1)\sqrt{t^2-r^2}\Big]_0^t - \int_0^t 2r\sqrt{t^2-r^2}\,dr$$

$$= t + \Big[\frac{2}{3}(t^2-r^2)^{3/2}\Big]_0^t = t - \frac{2}{3}t^3 \quad \text{om } t<1$$

Om $t>1$:

$$u(t,0) = \Big[-(1-r^2)\sqrt{t^2-r^2} + \frac{2}{3}(t^2-r^2)^{3/2}\Big]_0^1$$

$$= t + \frac{2}{3}(t^2-1)^{3/2} - \frac{2}{3}t^3$$

Notera: $\frac{2}{3}(t^2-1)^{3/2} = \frac{2t^3}{3}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{3/2} = \frac{2t^3}{3} - t + O\left(\frac{1}{t}\right)$

då $t \to \infty$.

(c) Poissons formel ger:

$$u(t,0) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|x|=t} u(0,x)\,dS + \frac{1}{4\pi t}\iint_{|x|=t} u_t'(0,x)\,dS$$

$= 0 + (1-t^2)$ om $t<1$,

då $u_t'(0,x)$ är konstant på sfären $|x|=t$.

Om $t>1$ ser vi direkt att $u(t,0)=0$

Svar: (a) $u(t,0) = \begin{cases} t - t^3/3, & t<1 \\ 2/3, & t\geq 1 \end{cases}$

(b) $u(t,0) = \begin{cases} t - \frac{2}{3}t^3, & t<1 \\ t-\frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{3}(t^2-1)^{3/2}, & t\geq 1 \end{cases}$

(c) $u(t,0) = \begin{cases} 1-t^2, & t<1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$

4 (a) $C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{$godtyckligt många gånger deriverbara $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sådana att $\varphi(x)=0$ för $|x|>R$ för något $R<\infty\}$.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) = \{$linjära funktionaler $u: C_0^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ som är kontinuerliga$\}$

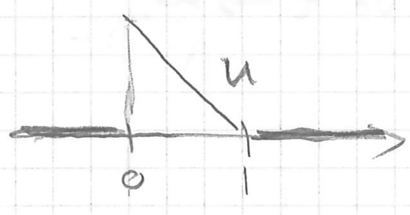
$\Leftrightarrow$ i betydelsen att $u[\varphi_k] \to u[\varphi]$ om alla derivator av $\varphi_k - \varphi \to 0$ likformigt och φ_k, φ alla är $=0$ då $|x|>R$ för något $R<\infty$.

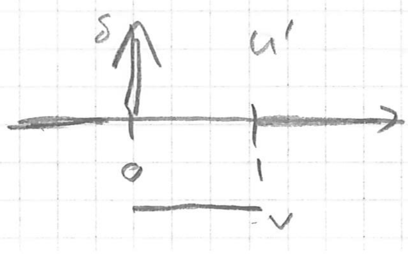
(b) Per definitionen av u':

$u'[\varphi] = -u[\varphi'] = -\int_0^1 (1-x)\varphi'(x)\,dx = -[(1-x)\varphi(x)]_0^1$
$+ \int_0^1 (-1)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) - \int_0^1 \varphi(x)\,dx$

Detta visar att

$u' = \delta + v$, där v är funktionen $v(x) = \begin{cases} -1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$





(c) För fix $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$: (5)

$$\int n^3 \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx = -\int (-n^2 \cos nx)\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= -\int (n \sin nx)\, \varphi''(x)\, dx = \int (-\cos nx)\, \varphi^{(3)}(x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{n} \sin(nx)\, \varphi^{(4)}(x)\, dx$$

efter 4 partielintegrationer, så

$$\left| \int n^3 \sin(nx)\, \varphi\, dx \right| \le \frac{1}{n} \underbrace{\int |\varphi^{(4)}(x)|\, dx}_{< \infty} \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Svar: (b) $u' = \delta + v$, $v = \begin{cases} -1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$

(c) $n^3 \sin(nx) \to 0$ svagt

(5) (a) Laplaces fundamentallösning för $\mathbb{R}^2$ är:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2}$$

Fixera $(x_0, y_0) \in D$, dvs $y_0 > 0$.

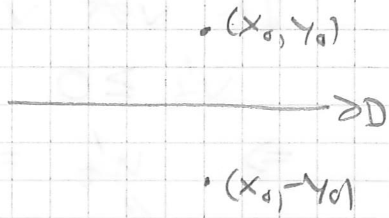
Vi söker Greensfunktion

$$G = \Phi(x-x_0, y-y_0) + g_{x_0,y_0}(x,y), \text{ där}$$

$\Delta g_{x_0,y_0} = 0$ i D och $G = 0$ på ∂D

Genom spegling, ansätt

$$g_{x_0,y_0}(x,y) = c \cdot \Phi(x-x_0, y+y_0)$$



Uppenbarligen är $\Delta g_{x_0,y_0} = 0$ i D. Välj konstanten c s.a.

$$\Phi(x-x_0, -y_0) + c\, \Phi(x-x_0, y_0) = 0$$

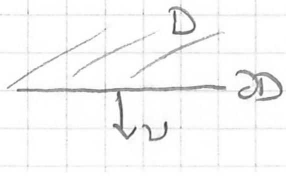
för alla $x \in \mathbb{R}$.

Det är klart att $c = -1$ duger, så

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((x-x_0)^2 + (y+y_0)^2).$$

(b) Greens andra formel:

$$\int_{\partial D} \Big(u \frac{\partial G}{\partial \nu} - \underbrace{G}_{=0} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)\, ds = \int_D \Big(u \underbrace{(\Delta G)}_{= \delta_{x_0,y_0}} - \underbrace{\Delta u}_{=0} \cdot G\Big)\, dx$$



$$\Rightarrow u(x_0,y_0) = \int_{\partial D} u \left(-\frac{\partial G}{\partial y}\right) dx$$

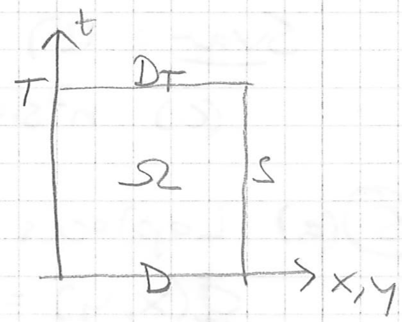
$$= -\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \frac{y+y_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right)\Bigg|_{y=0} u(x,0)\,dx$$ ⑥

$$= \frac{1}{\pi}\int_1^5 \frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\ \arctan\frac{x-x_0}{y_0}\ \right]_1^5 = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{5-x_0}{y_0} - \arctan\frac{1-x_0}{y_0}\right)$$

Svar: (a) $G_1 = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}$

(b) $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{5-x}{y} - \arctan\frac{1-x}{y}\right)$



⑥ (a) Sats: Om $u \in C^2(\overline{\Omega})$ på $\overline{\Omega} = \Omega \cup \underbrace{\partial\Omega}_{= D \cup S \cup D_T}$

och $u'_t = \Delta u$ på Ω, så antar u ett maxvärde på D (startdata) eller på ∂S (randdata).

Bevis: Tag $\varepsilon > 0$ och betrakta hjälpfunktionen

$v(t,x) = u(t,x) - \varepsilon \cdot t$

I maxpunkter för v i det inre Ω och bland slutdata D_T vet vi att:

$v'_t \geq 0$ och $\Delta v \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \underset{v'_t + \varepsilon \geq \varepsilon}{\underset{\|}{u'_t}} = \underset{\Delta v \leq 0}{\underset{\|}{\Delta u}} \qquad \text{motsägelse.}$$

v:s maxpunkter måste alltså ligga på D eller S.

För u drar vi slutsatsen:

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\Omega} v + \varepsilon \cdot T \leq \max_{D \cup S} v + \varepsilon T$$

$$\leq \max_{D \cup S} u + \varepsilon T$$

Låter vi $\varepsilon \to 0$ följer slutsatsen.

(b) $v_1 = -u$ löser $v_{1t}' = \Delta v_1$ och $v_1 \le 0$ på $S \cup D$

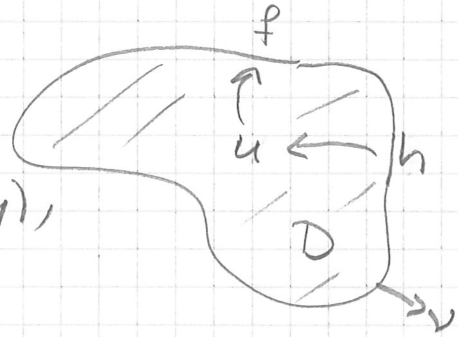
$\Rightarrow u(t,x,y) = -v_1(t,x,y) \ge 0$ i Ω. 7

$v_2 = u - e^{-2t}\sin x \sin y$ löser $v_{2t}' = \Delta v_2$ och $v_2 \le 0$ på $S \cup D$

$\Rightarrow u(t,x,y) \le e^{-2t}\sin x \sin y$ i Ω.

Detta gäller för alla $T>0$, vilket visar uppskattningen.

7 (a) Givet $h : D \to \mathbb{R}$ är



$$u(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} h(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\ln|y-x|\,ds(y),$$

$x \in D$,

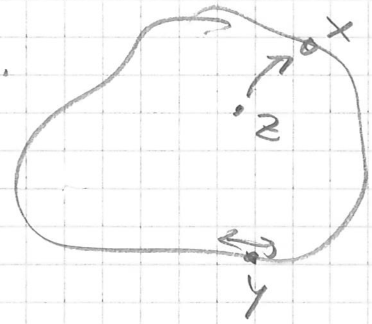
dubbelskiktspotentialen i D.

(Definitionen i DC innefattar ett minustecken.)

(b) För $x \in \partial D$ är

$$\lim_{\substack{z\to x\\ z\in D}} u(z) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} h(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\ln|y-x|\,ds(y)$$

Se föreläsningsanteckningar/boken.



(c) Oavsett densitet h är

$\Delta u = 0$ i D genom derivering under integraltecknet.

Givet Dirichletdatum f löser vi integralekvationen

$$\frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} h(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\ln|y-x|\,ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D,$$

för h. Dubbelskiktpotentialen u i D av detta h, är Dirichletproblemets lösning enl. (b).