MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690
2019-04-26, kl. 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Gustav Lindwall, ankn. 5325

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget VG, inklusive bonus.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Bestäm den allmänna lösningen $u(x, y)$ till den partiella differentialekvationen

$$12u''_{xy} = 4u''_{xx} + 9u''_{yy}.$$

(7p)

2. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen och begränsad mängd i planet med slät rand ∂D.

   (a) Definiera funktionsrummet $H^1_0(D)$. Förklara varför $H^1_0(D)$ är ett Hilbertrum. (2p)

   (b) Låt f vara en kontinuerlig funktion på $\overline{D}$. Ge en variationsformulering av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} (e^x u'_x)'_x + (e^y u'_y)'_y + f = 0 & \text{i } D, \\ u = 0 & \text{på } \partial D. \end{cases}$$

   Visa att en funktion $u \in C^2(\overline{D})$ löser randvärdesproblemet och och endast om den löser variationsproblemet. (4p)

   (c) Förklara vilka egenskaper hos variationsproblemet som behövs för att det säkert ska ha en svag lösning i $H^1_0(D)$. (2p)

3. Betrakta funktionen $u(t, x)$ som löser vågekvationen $u''_{tt} = \Delta u$ för $t > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, med startvillkoren $u(0, \mathbf{x}) = 0$ och

$$u'_t(0, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - |\mathbf{x}|, & |\mathbf{x}| < 1, \\ 0, & |\mathbf{x}| \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Formulera d'Alemberts lösningsformel för dimension $n = 1$ och godtyckliga initialdata, och beräkna sedan $u(t, 0)$ för alla $t > 0$. (3p)

   (b) Formulera Poissons lösningsformel för dimension $n = 3$ och godtyckliga initialdata, och beräkna sedan $u(t, 0)$ för alla $t > 0$. (3p)

   (c) Förklara hur dessa resultat är relaterade till Huygens princip. (2p)

Var god vänd!

4. (a) Betrakta distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ som ges av

$$u[\phi] = \iint_D \phi(x,y)dxdy,$$

där D är första kvadranten $x, y > 0$. Beräkna u''_{xy}. (3p)

(b) Låt $v_k(x) = ke^{-k|x|}$ för $x \in \mathbf{R}$. Avgör om följden av funktioner v_k konvergerar i $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ och beräkna i så fall gränsdistributionen. (3p)

5. (a) Definiera vad som menas med en Greensfunktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ för ett område $D \subset \mathbf{R}^2$. (2p)

(b) Ange Greensfunktionen $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ för cirkelskivan $x^2 + y^2 < a^2$ i $\mathbf{R}^2$, med radie $a > 0$. (3p)

(c) Antag att u är harmonisk för $|\mathbf{x}| < 3$ och att

$$u(3\cos\theta, 3\sin\theta) = 2\cos^2\theta + 2.$$

Beräkna $u(0,0)$ samt u:s maximum i cirkelskivan $|\mathbf{x}| \leq 3$. (4p)

6. (a) Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område i planet med slät rand. Antag att $u \in C^2$ löser vågekvationen $u''_{tt} = \Delta u$ för $\mathbf{x} \in D$, $t > 0$, med Neumanns randvilkor $\partial u/\partial n = 0$ för $\mathbf{x} \in \partial D$, $t > 0$. Definiera energifunktionalen

$$E(t) = \int_D (u'_t(t,\mathbf{x})^2 + |\nabla u(t,\mathbf{x})|^2) d\mathbf{x}.$$

Visa att $E(t)$ är konstant. (3p)

(b) Antag att $u(t,x,y)$ är en C^2 funktion som löser start/randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} = \Delta u, & x^2 + y^2 < 1, t > 0, \\ u = u'_t = 0, & x^2 + y^2 < 1, t = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = 0, & x^2 + y^2 = 1, t > 0. \end{cases}$$

Visa att $u(1, 1/2, 1/3) = 0$. (3p)

7. Betrakta PDEn $u'_t + u''_{xx} = 0$ för $0 < x < \pi$, $t > 0$, med Dirichlets randvillkor $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ for $t > 0$.

(a) Bestäm alla separabla lösningar till $u'_t + u''_{xx} = 0$ med Dirichlets randvillkor. (3p)

(b) Finn två lösningar u_1 och u_2 till $u'_t + u''_{xx} = 0$ med Dirichlets randvillkor sådana att $\max_{0 \leq x \leq \pi} |u_1(0,x) - u_2(0,x)| \leq 10^{-6}$ och $\max_{0 \leq x \leq \pi} |u_1(1,x) - u_2(1,x)| \geq 10^6$. (3p)