Lösningsförslag TMA 690 26/4 2019

1 Karakteristisk ekv.

$$12\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=4\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+9\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

$\varphi(x,y)=3x+2y$ är en lösning.

Ett bra variabelbyte är

$$\begin{cases} s=3x+2y \\ t=x \end{cases}$$

Kedjeregeln: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=3\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial s} \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(3\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)^2u=9\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(2\frac{\partial}{\partial s}\right)^2u=4\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(3\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)2\frac{\partial}{\partial s}u=6\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}$$

Ekv. transformeras till

$$12\left(6\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}+2\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}}\right)=4\left(9\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}+6\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+9\left(4\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

Allmän lösning: $u(s,t)=A(s)t+B(s)$

<u>Svar</u>: $u(x,y)=A(3x+2y)\cdot x+B(3x+2y)$

2 (a) $H_0^1(D)$ är mängden av funktioner $u:D\to\mathbb{R}$ sådana att 1. $u\in L_2(D)$ 2. Distributionsderivatorna $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ är L_2-funktioner och 3. $u=0$ på ∂D.

$H_0^1(D)$ är ett Hilbertrum då

1. Normen $\|u\|_{H_0^1}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{H_0^1}}$ ges av en skalärprodukt $\langle u,v\rangle_{H_0^1}=\int_D(\nabla u\cdot\nabla v+uv)\,dx\,dy$, och
2. $H^1(D)$ är fullständigt.

(b) PDEn är $\operatorname{div}(e^xu'_x,e^yu'_y)$. Multiplicera med $\varphi\in H_0^1(D)$ och använd divergenssatsen:

$$0=\int_D\left(\operatorname{div}(e^xu'_x,e^yu'_y)+f\right)\varphi\,dx\,dy$$

$$=\int_{\partial D}n\cdot(e^xu'_x,e^yu'_y)\varphi-\int_D(e^xu'_x\varphi'_x+e^yu'_y\varphi'_y)+\int_D f\varphi$$

Då $\varphi = 0$ på ∂D fås

$$\underbrace{\int_D (e^x u'_x \varphi'_x + e^y u'_y \varphi'_y)\,dx\,dy}_{=:a(u,\varphi)} = \underbrace{\int_D f\varphi\,dx\,dy}_{=:L(\varphi)}, \quad \varphi \in H_0^1(D)$$

Omvänt, om $u \in C^2(\bar{D})$ löser detta variationsproblem, visar denna räkning baklänges att

$$\int_D (\operatorname{div}(e^x u'_x, e^y u'_y) + f)\varphi\,dx\,dy = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(D)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(e^x u'_x, e^y u'_y) + f = 0.$$

Per definition gäller $u \in H_0^1(D)$, så $u = 0$ på ∂D.

(c) Det som garanterar existens av svaga lösningar är

- $H_0^1(D)$ = Hilbertrum
- $a(u,\varphi)$ = kontinuerlig, elliptisk, symmetrisk.
- $L(\varphi)$ = kontinuerlig.

③ (a) d'Alembert:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u(0,x+t) + u(0,x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u'_t(0,s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(t,0) = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t}(1-|s|)\,ds = \left[s - \frac{s^2}{2}\right]_0^t = t - \frac{t^2}{2} \quad \text{om } t<1$$

$$u(t,0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-|s|)\,ds = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{om } t \geq 1$$

(b) Poisson:

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|y-x|=t} u(0,y)\,dS + \frac{1}{4\pi t}\iint_{|y-x|=t} u'_t(0,y)\,dS$$

$$\Rightarrow u(t,0) = \frac{1}{4\pi t}\iint_{|y|=t}(1-|y|)\,dS = \frac{1}{4\pi t}4\pi t(1-t) = 1-t \quad \text{om } t<1.$$

$$u(t,0) = \frac{1}{4\pi t}\iint_{|y|=t} 0\,dS = 0 \quad \text{om } t>1.$$

Svar: (a) $u(t,0) = \begin{cases} t - t^2/2, & t<1 \\ 1/2, & t \geq 1 \end{cases}$

(b) $u(t,0) = \begin{cases} 1-t, & t<1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$

(c) Huygens princip, giltig i dimension 3, visar utan räkning att $u(t,0) = 0$ då $t>1$ eftersom $u(0,x) = 0$ för $|x|>1$.

(4) (a) $u''_{xy}[\varphi] = (-1)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty u''_{xy}(x,y)\,dy\,dx$

$= \int_0^\infty \left[u'_x(x,y) \right]_{y=0}^\infty dx = -\int_0^\infty u'_x(x,0)\,dx$

$= -\left[u(x,0) \right]_0^\infty = u(0,0) = \delta[\varphi]$

Svar: $u''_{xy} = \delta$ = Diracs delta-distribution.

(b) $v_k[\varphi] = \int k e^{-k|x|} \varphi(x)\,dx = / y = kx /$

$= \int k e^{-|y|} \varphi(\frac{y}{k}) \frac{dy}{k} = \int e^{-|y|} \varphi(\frac{y}{k})\,dy$

$\to \int e^{-|y|} \varphi(0)\,dy = 2\varphi(0) \int_0^\infty e^{-y}\,dy = 2\varphi(0)$

$= 2\delta[\varphi]$

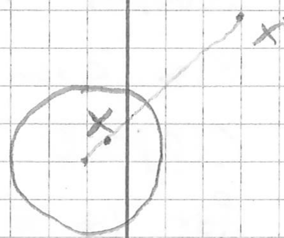
Svar: v_k konvergerar mot 2δ i distributions-mening.

(5) (a) $G(x,y)$, med pol i $x \in D$, är en Greensfunktion om $G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| + g_x(y)$, där $\Delta g_x = 0$ i D, och $G(x,y) = 0$ då $y \in \partial D$.

(b) $x^* = \frac{a^2}{|x|^2} x$ = spegelpunkt m.a.p. cirkeln $|x| = a$

Ansatt

$G(x,y) = \frac{1}{4\pi} \ln|x-y|^2 - \frac{e^c}{4\pi} \underbrace{\ln|x^*-y|^2}_{\text{harm. i } y \in D}$



För $|y| = a$

$G(x,y) = 0 \iff |x-y|^2 = c\,|\frac{a^2}{|x|^2} x - y|^2$

$\iff |x|^2 + a^2 - 2\langle x,y \rangle = c\left(\frac{a^4}{|x|^2} + a^2 - 2\frac{a^2}{|x|^2} \langle x,y \rangle \right)$

Välj $c = \frac{|x|^2}{a^2}$

Svar: $G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{a|x-y|}{|x| \cdot |\frac{a^2}{|x|^2} x - y|} \right)$

(c) Enligt maximumprincipen är max på $|x| \leq 3$ lika med $\max_\theta (2\cos^2\theta + 2) = 4$.

Enligt medelvärdessatsen är

$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\cos^2\theta + 2)\,d\theta = 3$

(6) (a) $E'(t) = \iint_D \frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + |\nabla u|^2 \right) dx\,dy$

$= 2\iint_D \left(u''_{tt}\, u'_t + \langle \nabla u, \nabla u'_t \rangle \right) dx\,dy$

$= /\text{Green}/ = 2\iint_D \underbrace{\left(u''_{tt} - \Delta u \right)}_{=0} u'_t \, dx\,dy$

$+2\iint_{\partial D} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=0} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\, ds(y) \qquad = 0.$

så $E(t)$ är konstant.

(b) Om

$$\begin{cases} u''_{tt} = \Delta u, & \bar{x} \in D,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \bar{x} \in \partial D,\ t > 0 \\ u = 0 \text{ och } u'_t = 0, & \bar{x} \in D,\ t = 0 \end{cases}$$

så är $E(0) = 0$. Enligt (a) är $E(t) = 0$, så

$$\int_D \left((u'_t(t,\bar{x}))^2 + |\nabla u(t,\bar{x})|^2 \right) d\bar{x} = 0$$

För fixt $t > 0$ följer $\nabla u = 0$, så

$u(t,x) = C(t)$ – konstant.

Men även $u'_t = C' = 0$, så $C(t) = C$

$C(0) = 0$ så $u(t,\bar{x}) = 0$ för alla (t,x), speciellt

för $(t,\bar{x}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

(7) (a) $u(t,x) = T(t)X(x) \Rightarrow$

$T'(t)X(x) + T(t)X''(x) = 0$

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{ober. av } x} = \underbrace{-\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{ober. av } t} = a = \text{konstant}.$$

$X''(x) + aX(x) = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\sqrt{a}x) + B\sin(\sqrt{a}x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, $X(\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = k \in \mathbb{Z}_+$

$T'(t) = \underset{= k^2}{a}\, T(t) \Rightarrow T(t) = Ce^{k^2 t}$

Svar: De separabla lösningarna är

$$u(t,x) = Ce^{k^2 t}\sin(kx), \quad C \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Låt $u_2 = 0$ och $u_1 = Ce^{k^2 t}\sin(kx)$

$$\max_{\substack{0\le x\le\pi \\ t=0}} |u_1 - u_2| = |C| \qquad \text{Låt } C = 10^{-6}$$

$$\max_{\substack{0\le x\le\pi \\ t=1}} |u_1 - u_2| = Ce^{k^2}$$

Välj $k = 8 \Rightarrow Ce^{k^2} = 10^{-6}\cdot e^{64} = 10^{-6}\cdot \underbrace{e^{4}}_{>10}{}^{\cdot 16} > 10^{10} > 10^{6}$

<u>Svar</u>: $u(t,x) = 10^{-6} e^{64t}\sin(8x)$.