MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Partiella differentialekvationer F3, TMA690
2019-08-19, kl. 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Juan Inda, ankn. 5325

Totalt antal skrivningspoäng är 50. Till dessa läggs bonuspoäng. Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget VG, inklusive bonus.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningsförslag och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$10u''_{xy} = 3u''_{xx} + 3u''_{yy}.$$

   (a) Bestäm den allmänna lösningen $u(x, y)$. (5p)

   (b) Kan det finnas en lösning sådan att $u(0, 0) = 1$ och $u(x, y) < 0$ då $x^2 + y^2 = 1$? (2p)

2. (a) Redogör för definitionen av Fouriertransformen $\hat{u}$ av distributioner u. Speciellt ska de relevanta klasserna av testfunktioner och distributioner förklaras. (5p)

   (b) Beräkna Fouriertransformen $\hat{\delta}$ av Diracs delta-distribution δ. (2p)

3. Betrakta startvärdesproblemet för vågekvationen i $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{cases} u''_{tt}(t, \mathbf{x}) = u''_{xx}(t, \mathbf{x}) + u''_{yy}(t, \mathbf{x}), & t > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \\ u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2, \\ u'_t(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

   Lösningsformeln för givet startläge f och startfart g är

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{|y-x|<t} \frac{f(\mathbf{y})d\mathbf{y}}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} + \frac{1}{2\pi} \iint_{|y-x|<t} \frac{g(\mathbf{y})d\mathbf{y}}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}.$$

   (a) Härled d'Alemberts formel för lösningen $u(t, x)$ till vågekvationen i en rumsvariabel $x \in \mathbf{R}$ genom Hadamard's method of descent. (5p)

   (b) Huygens princip gäller till 50% i en rumsdimension. Förklara vad som menas med detta påstående. (2p)

Var god vänd!

4. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara den öppna enhetsskivan.

   (a) Ge en variationsformulering av randvärdesproblemet

   $$\begin{cases} -\Delta u + e^{xy}u = \sin(x+y) & \text{i } D, \\ u'_n = y^2 & \text{på } \partial D. \end{cases}$$

   Visa att en funktion $u \in C^2(\overline{D})$ löser randvärdesproblemet om och endast om den löser variationsproblemet. (5p)

   (b) Verifiera att variationsproblemet har en lösning. (3p)

5. (a) Formulera och bevisa den svaga maximumprincipen för värmeledningsekvationen $u'_t = \Delta u$ på området $D \times (0, T)$. (5p)

   (b) Verifiera denna maximumprincip för funktionen $u(t, x) = 1 - 2t - x^2$ och $D = (0, 1)$. (2p)

6. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ vara en öppen mängd och låt $u \in C^2(\Omega)$. Som bekant gäller att

   $$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D} u \, ds,$$

   för varje cirkelskiva $D \subset \Omega$ med radie r och centrum i $\mathbf{x}$, om u är en harmonisk funktion. Visa omvänt att en funktion u nödvändigtvis är harmonisk om den uppfyller denna medelvärdesegenskap. (7p)

7. Låt $D \subset \mathbf{R}^2$ vara ett begränsat område i planet med slät rand, och låt $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k = 1, 2$, vara kontinuerliga funktioner sådana att

   $$\begin{cases} f_k(s) > 0, & s > 0, \\ f_k(s) < 0, & s < 0. \end{cases}$$

   Betrakta det icke-linjära start- och randvärdesproblemet

   $$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} + u''_{yy} - f_1(u), & \mathbf{x} \in D, 0 < t < T, \\ u'_n + f_2(u) = 0, & \mathbf{x} \in \partial D, 0 < t < T, \\ u = g, & \mathbf{x} \in D, t = 0, \end{cases}$$

   för given kontinuerlig startfunktion $g : D \to \mathbf{R}$.

   (a) Visa att $u = 0$ om $g = 0$. (5p)

   (b) Varför följer det inte av (a) att problemet har högst en lösning för godtycklig given g? (2p)