Lösningsförslag TMA690 190819

1

(1) Karakteristisk ekvation:

$$10 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \iff$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0$$

Lösningar $\varphi = 3x+y$, $\varphi = x+3y$

Bra variabelbyte:

$$\begin{cases} s = 3x+y \\ t = x+3y \end{cases}$$

Kedjeregeln $\Rightarrow$

$$10\left(3\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}+3\frac{\partial}{\partial t}\right)u = 3\left(3\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u + 3\left(\frac{\partial}{\partial s}+3\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u$$

$$\iff \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} = 0$$

Integration $\Rightarrow$

$$u = f(s)+g(t) = \underline{f(3x+y)+g(x+3y)}$$

Allmän lösning, $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ godtyckl. funktioner.

(b) Ekvationen är hyperbolisk, så ingen maximumprincip förhindrar en sådan lösning att existera.

Svar: Ja.

(2) f, g integrable funktioner $\Rightarrow$

$$\int f(x)\hat{g}(x)\,dx = \iint f(x)g(t)e^{-ixt}\,dx\,dt = \int \hat{f}(t)g(t)\,dt$$

Detta motiverar definitionen

$(*)$ $\hat{u}[\varphi] := u[\hat{\varphi}]$, φ = testfunktion

av F-transf. $\hat{u}$ av en distribution $\hat{u}$.

Problem: $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow \hat{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

speciellt gäller ej allmänt att $\hat{\varphi}=0$ utanför en kompakt mängd.

Lösning: vi använder testfunktioner

$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ ;\ \varphi$ godtyckligt många gånger deriverbar och $\to 0$ snabbare än varje polynom då $x \to \infty \}$

Detta leder till tempererade distributioner

$S'(\mathbb{R}^n) := \{ u : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} ;\ u \text{ linjär och kontinuerlig} \}$

Då $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ger $(*)$ en väldefinierad tempererad distribution $\hat{u}$.

(b) $\hat{\delta}[\varphi] = \delta[\hat{\varphi}] = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\,dt = 1[\varphi]$

Svar: $\hat{\delta} = 1$

(3) (a) Se Folland 2.12 (Lösning på inlämning 2 på kurshemsidan.)

(b) d'Alembert:

$$u(t,x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x-t) + f(x+t)\right)}_{\text{beror på } f\text{:s värden bara i } x-t \text{ och } x+t} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds}_{\text{beror på } g\text{:s värden i hela intervallet } [x-t,\,x+t]}$$

$\therefore$ Hälften av en Huygens princip.

(4) (a) Mult. med testfunktion φ och Greens formel $\Rightarrow$

$$\underbrace{-\iint_D \Delta u \varphi}_{} + \iint_D e^{xy} u \varphi = \iint_D \sin(x+y)\varphi$$

$$= \iint_D \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_{\partial D} u_n' \varphi$$

Låt $a(u,\varphi) = \iint_D \nabla u \cdot \nabla\varphi + e^{xy} u \varphi$

$L(\varphi) = \iint_D \sin(x+y)\varphi + \int_{\partial D} y^2 \varphi$

$V = H^1(D)$

Det sökta variationsproblemet: för $u \in V$:

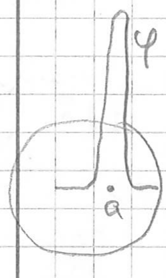
$(*)$ $a(u,\varphi) = L(\varphi)$, $\forall \varphi \in V$

Antag $u \in H^1(D) \cap C^2(\bar{D})$ löser (*).

Green ⇒

$$\int_{\partial D} u'_n \varphi - \iint_D \Delta u \varphi + e^{xy} u \varphi = \iint_D \sin(x+y)\varphi + \int_{\partial D} y^2 \varphi$$

$$\Leftrightarrow \iint_D \left(-\Delta u + e^{xy} u - \sin(x+y)\right)\varphi = \int_{\partial D} (y^2 - u'_n)\varphi \quad , \forall \varphi \in H^1(D)$$



1. Välj $\varphi \in C_0^\infty(D)$ s.a. $\varphi \to \delta_a$ = Dirac delta vid $a \in D$ ⇒

   $-\Delta u + e^{xy} u = \sin(x+y)$ i hela D.

2. Vi har nu $\int_{\partial D} (y^2 - u'_n)\varphi = 0$, $\forall \varphi \in H^1(D)$.

   Välj nu $\varphi \to \delta_b$ = Dirac delta på cirkeln ∂D vid $b \in \partial D$.

   ⇒ $u'_n = y^2$ på hela ∂D.

(b) Viktigast: a är elliptisk på $H^1(D)$, ty $e^{xy} \geq e^{-1}$ på D, så

$a(u,u) \geq \int |\nabla u|^2 + e^{-1} u^2 \geq e^{-1} \|u\|^2_{H^1(D)}$

Vidare är • a kontinuerlig och symmetrisk.

• L är kontinuerlig ty spåravbildningen $H^1(D) \to L_2(D)$ är kontinuerlig.

• $V = H^1$ är ett Hilbertrum.

(5) (a) Se tentan 190117-6.

(b) u har nivåkurvor $u = C \Leftrightarrow$

$t = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1-C)$

Funktionsundersökning visar att f:s extremvärden på $[0,1] \times [0,T]$ är min i $(1,T)$ och max i $(0,0)$, vilka båda är start eller randdata.

6) Vi visar $\Delta u(a) = 0$, $a \in \Omega$.

$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$

lika enl. antagande.

Green $\Rightarrow$

$$\iint_{|x-a|<r} \Delta u(x)\,\Phi(x-a) - u(x)\underbrace{\Delta\Phi(x-a)}_{=\delta_a} = \int_{|x-a|=r} \frac{\partial u}{\partial n}\underbrace{\Phi(x-a)}_{=\frac{1}{2\pi}\ln r = \text{konstant.}} - u\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x-a)}_{\frac{1}{2\pi r}}$$

Då $\displaystyle\int_{|x-a|=r} \frac{\partial u}{\partial n} = \iint_{|x-a|<r} \Delta u$, följer

$\Rightarrow$

$$\iint_{|x-a|<r} \underbrace{\ln\left(\frac{r}{|x-a|}\right)}_{\geq 0} \Delta u(x) = 0, \quad \forall r$$

Om $\Delta u(a) \neq 0$ får vi motsägelse.

$\therefore \Delta u = 0$ i D.

7) (a) Låt $E(t) = \int_D u(t,x)^2 dx$

$$E'(t) = \iint_D 2u u'_t = \iint_D 2u(\Delta u - f_1(u)) = /\text{Green}/ =$$

$$= \int_{\partial D} 2u \underbrace{u'_n}_{= -f_2(u)} - \iint_D 2|\nabla u|^2 - \iint_D 2u f_1(u)$$

Alla termer ≤ 0 pga antagandet.

$\Rightarrow E'(t) = 0$

$\Rightarrow \int_D u(t,x)^2 dx \leq \int_D u(0,x)^2 dx = 0$, $t > 0$

$\Rightarrow u = 0$.

(b) Antag u_1 och u_2 löser problemet, båda med startdata g. Låt $u = u_1 - u_2$, så $u(0,x) = 0$. Då problemet är icke-linjärt uppfyller inte u PDEn eller randvillkoret, så vi kan inte från (a) dra slutsatsen att $u = 0$, dvs $u_1 = u_2$, som i linjära fallet.