

Vecka 3-4 Matte D2

I stället för att använda sinus och cosinusfunktioner brukar man (vilket är mindre intuitivt men matematiskt enklare) använda komplexa exponentialfunktioner. Varje kombination av $\sin(kt)$ och $\cos(kt)$ kan skrivas (med komplexa koefficienter framför) $\exp(ikt)$ och $\exp(-ikt)$. Tyvärr dyker varje frekvens k då upp med både positivt och negativt tecken. Negativa frekvenser är en av de ointuitiva grejorna.

Övning

finn relationerna mellan reella och komplexa fourierkoefficienter, 12.4 : 11.

Fourierserier används för periodiska förlopp (i formen ovan tvåpi-periodiska, men andra perioder är en enkel skalning (se boken eller tänk själv)) För icke-periodiska förlopp går man över till en integralframställning och detta brukar (nästan) bara göras på komplex form, *fouriertransformen*. Läs 15.3, särskilt den heuristiska härledningen (den komplexa formen är det som används) **Övning** 12.4: 1,7

Den viktigaste tillämpningen

av Fouriertransformer och -serier är att analysera signaler med avseende på frekvensinnehåll, snarare än att lösa PDE.. En klassisk tillämpning är att identifiera de ingående frekvenserna i ljudet från en växelåda och därmed höra hur fort och hur ljudligt olika drev roterar. I praktiken används den diskreta fouriertransformen DFT uträknad med en snabb algoritm FFT (se 15.5)

DFT kan antingen ses som en transform på en ändlig följd komplexa tal och har som sådan tillämpningar inom numerisk analys. Den kan också betraktas som en approximation av den kontinuerliga Fouriertransformen eller som en approximation av F-koefficienterna (på komplex form) till en periodisk funktion.

Det sista låter konstigt men vad man transformerar är alltid ett ändligt antal samplingsvärden. Sen kan man antingen låtsas att funktionen är försumbar utanför det intervall man betraktar eller är periodisk. Den matematiska rekonstruktionsformeln ger en periodisk fortsättning.

MATLABexempel

```
Skapa en vektor av t-värden w=2*pi/1024;t=1:1024;t=w*t;  
1024 är inte godtyckligt, FFT fungerar bäst på tvåpotenser
```

```
Bilda en summa av två sinusfunktioner f=sin(100*t)+.5*sin(200*t);;  
F=fft(f);plot(abs(f))
```

OBS F har komplexa värden (därför abs) och fenomenet med de negativa frekvenserna: Varje sinuskomponent representeras av två spikar (som fft räknas ut i matlab ligger de positiva i första halvan av bilden och de negativa sist (F är periodisk) Vill du ha nollan i mitten så går det med fftshift)

Som sagts ovan vill dft helst se periodiska funktioner så om man inte börjar och slutar med samma värde (vilket ger diskontinuerlig periodisk fortsättning) får man en massa skräp (läckage)

Gör som ovan med $f = \sin(100.5*t) + .5*\sin(200*t)$
(och det är bättre att fråna och med nu ta $\text{plot}(\log(\text{abs}(F)))$)

Andra exempel att prova: Amplitudmodulering :

$f = (2 + \sin(8*t)) * \sin(100*t)$

Här ser du både negativa frekvenser och de så kallade sidbanden på ömse sidor om 100.

Frekvensmodulering $f = \sin(100*(1 + .1*\sin(8*t)))$

Parsevals formel ger oss en möjlighet att analysera energiinnehållet i signaler.
(se BETA och **övning** 12.2:21 12.1:19, 17)

Övning

Om ett stycke musik spelas in på band och spelas upp med dubbla hastigheten kommer (förstås) frekvenserna att fördubblas; musiken lyfts en oktav. Samtidigt halveras amplituden. Visa detta (både genom ett enkelt variabelbyte i den definierande integralen och genom att slå upp lämplig fouriertransformformel) Ge sedan ett energiargument för halveringen.

Visa med hjälp en förskjutningslag att signalerna $f(t)$ och $f(t-T)$ (T konstant fördröjning) har samma effektspektrum (belopp på fouriertransformen). Varför är detta fysikaliskt självklart.

Faltning

förekommer i samband med filtrering men dyker upp i andra sammanhang : Följ mönstret i ex1 ,15.4 och gör 15.4:4

läs om bandbegränsning s763 som förberedelse till:

Inlämningsuppgift 2 Matte D2

handlar om att *filtrera* en signal. I detta fall för att ta bort höga frekvenser. Vi kommer att göra det på ett sätt som är lätt att förstå på transformsidan, ett som är lätt att förstå som manipulation av den verkliga signalen och en klassisk kompromiss som är lätt att bygga med passiva komponenter.

Börja med att skapa en fyrkantvåg $f = [-\text{ones}(1,512), \text{ones}(1,512)]$

Som du förhoppningen kommer ihåg består den av oändligt många frekvenser (kolla gärna $\text{plot}(\log(\text{abs}(\text{fft}(f))))$)

Vi börjar med en *perfekt lågpasfiltrering* vi tar bort de höga frekvenserna och behåller de låga oförändrade:

$\text{filt} = [\text{ones}(1,51), \text{zeros}(1,923), \text{ones}(1,50)]$

```
ft=fft(f)
gt=filt.*ft      (nu finns bara frekvenser t o m 50 kvar)
plot(iff(gt))   HOPPSAN
plot(real(iff(gt)))      Lämna in denna bild
```

Anm: jag har anpassat mig till matlab med negativa frekvenser i slutet på bilden.
Egentligen är det naturligare att använda fftshift

Den perfekta filtreringen ovan gick att utföra eftersom vi hade tillgång till hela f och hela ft.
Om man vill göra något i realtid blir det viktigt med så k *kausala filter* som inte tillåts
skåda in i framtiden. Att ett filter är kausalt är lätt att se på tidssidan där man faltar med
den funktion som har filtrets transform (fråga handledaren)
plot(iff(filt)) så ser du att här kommer det med framtid

Den enklaste filtreringen på tidssidan är ett rent medelvärde över t.ex. 20 värden:

```
b=ones(1,20); h=conv(f,b)/20; plot(h)
```

Övertyga dig om att detta verkligen är en medelvärdesbildning
Nu har h blivit lite längre än 1024 (help conv). Skär ut en bit av längd 1024 någonstans i
mitten av h
Lämna in plot(fft(newh)./fft(f)) som ger beskrivningen av denna filterverkan på frekvens-
sidan

Till sist en klassiker: Butterworthfilter av ordning 3 (B-filter är maximalt flata i
passbandet till priset att inte dämpa stoppbandet så himla bra. Vanliga i ljudsammanhang
där man ju skall lyssna på passbandet)

```
[u v]=butter(3,.1)      skapar filterkoefficienter
b=filter(u,v,f)        filtrerar f rekursivt
```

Lämna in plot(b)
men titta gärna själv på abs(fft(b)./ft) som ger filterkaraktistiken
jämför med filt som är den ideala
osv osv osv **SLUT**

Har vi tid är det en god ide att redan denna vecka titta på de båda huvudexemplen på
begreppen «linjärt rum» och «skalärprodukt» nämligen vanliga n-vektorer och exempel
9.1 9.27 i LA **Övning** 9.1,9.6,9.7