Tredjegradsekvation

Exempel

Vi skall se hur man löser en tredjegradsekvation med allmän metod.

$z^3 + 3z^2 - 3z - 1 = 0$

Vi börjar med "kubkomplettering" för att få bort andragradstermen:
Sätt $w = z+$(koefficienten framför z^2)$/3$, dvs $w = (z+1)$ Det ger oss ekvationen

$w^3 - 6w + 4 = 0$, som vi skall lösa.

Sätt $w = a + b$. Insatt i ekvationen ger detta efter lite räkning

$(a^3 + b^3 + 4) + (a+b)(3ab - 6) = 0$, vilket ju blir uppfyllt om

$\left\{ \begin{array}{lrcr} (1) & a^3 + b^3 & = & -4 \\ (2) & 3ab & = & 6 \end{array} \right.$. Multiplicera 1:a med a^3 och ta den andra höjt till 3:

$\left\{ \begin{array}{rcl} a^6 + 4a^3 + a^3b^3 & = & 0 \\ a^3b^3 & = & 8 \end{array} \right.$, vilket ger en andragradsekvation i a^3:

$(a^3)^2 + 4a^3 + 8 = 0$. Denna har lösningarna $a^3 = -2 \pm 2i$.

På grund av symmetrin i ekvationerna (1) och (2) så kommer b att uppfylla samma ekvation och från (1) får vi att om $a^3 = -2 + 2i$ så är $b^3 = -2 - 2i$ (eller tvärt om). Vi löser därför den binomiska ekvationen

$a^3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i(-3\pi/4 + k2\pi)}$ som har lösningarna

$a = \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + k2\pi/3)}$ $k = 0, 1, 2$ dvs

$a_1 = 1 + i$,

$a_2 = a_1 e^{i(2\pi/3)} = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1))$ och

$a_3 = a_1 e^{i(4\pi/3)} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1))$.

Nu får vi b_1, b_2, b_3 ur (2), dvs $b_j = 2/a_j = \dfrac{2}{|a_j|^2}\overline{a_j} = \dfrac{2}{(\sqrt{2})^2}\overline{a_j} = \overline{a_j}$:

$b_1 = 1 - i$.
$b_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1))$.
$b_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1))$.

(b_1, b_2, b_3 blir då också automatiskt lösningarna till ekvationen $b^3 = -2 - 2i$.) Slutligen:

$w_1 = a_1 + b_1 = 2$.
$w_2 = a_2 + b_2 = -(\sqrt{3} + 1)$.
$w_3 = a_3 + b_3 = \sqrt{3} - 1$. och

$z_1 = 1$.
$z_2 = -(\sqrt{3} + 2)$.
$z_3 = \sqrt{3} - 2$. PUH!

V.g. vänd.

Lösningsformel

Man kan sammanfatta dessa räkningar på följande sätt.

$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$

Sätt $\quad q = b - a^2/3, \quad r = c + a(2a^2 - 9b)/27. \quad$ och

$t_k = (-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}})^{1/3} e^{2k\pi i/3}, \quad k = 0, 1, 2.$

Då är rötterna $z_k = t_k - \frac{q}{2t_k} - \frac{a}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$

Kommentarer

- $\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$ skall tolkas som *någon* rot till ekvationen

  $w^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ och t_k sedan som *någon* rot till

  $w^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$
- Formlerna förutsätter att $t_k \neq 0$. Om $t_k = 0$ så innerbär det att $q = 0$ och att den ursprungliga ekvationen kan skrivas $(z + \frac{a}{2})^3 = \frac{a^3}{27} - c$, dvs en binomisk ekvation. Rötterna är då $z_k = (\frac{a^3}{27} - c)^{1/3} e^{2k\pi i/3} - \frac{a}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$
- Om a, b, och c alla är reella så vet vi att vi kan ha antingen 3 reella rötter eller en reell och 2 icke-reella. Man kan efter lite eftertanke inse att det förra fallet svarar mot att $\sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$ är icke-reellt (eller 0) och det senare mot att det är reellt (och $\neq 0$).