Tentamen i Linjär algebra för V1 (TMA840)

2002 10 24 kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon:
Obs! Ange linje och antagningsår samt namn och personnummer.

---

1. Fyra punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:
$P_1 : (1,0,0), P_2 : (2,2,1), P_3 : (1,1,1)$, och $P_4 : (1,1,0)$.

   (a) Bestäm ekvationen för linjen genom P_1, och P_2. (3p)

   (b) Bestäm ekvationen för planet genom P_1, P_2 och P_3. (3p)

   (c) Beräkna avståndet från detta plan till punkten P_4. (2p)

2. Lös matrisekvationen $AXB = C + 2XB$, där
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (6p)

3. Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

   a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2p)

   b) Bestäm baser för nollrummet och kolonnrummet till A. (Utnyttja gärna räkningarna i a).)
   Vad är rangen för A? (4p)

4. Bestäm symmetrialarna för ellipsen $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$. Beräkna också
längsta avståndet från origo till en punkt på ellipsen . (ON-system.) (6p)

5. Ett ON-system (O, x, y, z) är givet i rummet. Vi inför ett nytt ON-system, $(\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ på följande sätt. Nytt origo i punkten $(1,1,1)$. Positiva ξ-axeln går genom punkten $(3,3,2)$. η-axeln ligger i planet $x + z = 2$ och $\boldsymbol{e}_\eta$ har positiv z-komponent. ζ-axeln väljs så att det blir ett högersystem. Bestäm sambandet mellan koordinaterna för en punkt i de två systemen. (6p)

6. Låt A och B vara två symmetriska $n \times n$-matriser med exakt samma uppsättning egenvärden, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Visa, m.h.a. spektralsatsen att då finns det en ortogonal matris Q så att
$B = Q^t AQ$. (6p)

7. Låt $M = (A|\boldsymbol{b})$ vara totalmatrisen för ekvationssystemet (ES): $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$.
   (a) Formulera, med hjälp av stotheterna $rangA$, $rangM$ och n, villkoren för att
      (i) (ES) saknar lösning.
      (ii) (ES) har entydig lösning.
      (iii) (ES) har k-parametrig lösning. (3p)
   (b) Förklara hur man m.h.a. ovanstående kan inse att ett homogent ekvationssystem
   med fler obekanta än ekvationer har oänligt många lösningar. (3p)

8. Låt $\boldsymbol{a}$ vara en geometrisk vektor i rummet och låt $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ vara en ON-bas. Vad är då skrivsättet $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ett förkortat skrivsätt för?
Vad kallas talen a_x, a_y och a_z ? Visa att de är entydigt bestämda. (6p)

Lycka till,
SJ

Svar

1a) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 2, 1)$
1b) $x - y + z = 1$
1c) $1/\sqrt{3}$
2) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
3a) Saknar lösningar
3b)$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, respektive $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, Rang$A = 2$.
4) $y = \pm x$, längsta avstånd $= 2$.
5) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$