Tentamen i Linjär algebra för V1 (TMA840)

2003 01 11 kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Richards Grzibovskis, 0740-45 90 22
Obs! Ange linje och antagningsår samt namn och personnummer.

---

1. Låt T vara triangeln med hörn i punkterna $(1,2,1)$, $(0,1,-1)$ och $(2,0,0)$

   (a) Bestäm arean av T. (4p)

   (b) Beräkna vinkeln i T vid punkten $(1,2,1)$. (3p)

2. Lös följande ekvationssystem approximativt med minsta-kvadrat-metoden. Beräkna även medelfelet. $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ (7p)

3. (a) För vilka värden på a har ekvationssystemet

   $$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + ay + 2z = 1 \\ -2x + 2y + az = a \end{cases}$$

   entydig lösning, många lösningar resp. ingen lösning? (5p)

   (b) Lös systemet i fallet många lösningar. (2p)

4. Lös matrisekvationen $(DX + A)(X - B)^{-1} = C$, där
   A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och D=$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (6p)

5. Finn en matris P sådan att $P^t AP$ blir diagonal och beräkna A^{10} om
   $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (6p)

6. Låt X vara det linjära rummet bestående av alla polynom $p(x)$ av grad högst 3 sådana att $p(0) = p'(1) = 0$. Bestäm en bas för X. (5p)

7. (a) Definiera skalära trippelprodukten, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, för geomeriska vektorer. (1p)

   (b) Antag $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ har komponenterna (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z) respektive (c_x, c_y, c_z) i ett ON-system. Ange komponenterna till $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ m.h.a. 2×2-determinanter. (2p)

   (c) Visa, m.h.a. (b) och utvecklingssatsen, att $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ kan uttryckas som en 3×3 – determinant. (Komponentframställningen av skalärprodukt anses bekant.) (3p)

8. Besvara följande frågor.

(a) Om A är en 3×7-matris, vilka är då de möjliga värdena på dimensionen för nollrummet respektive kolonnrummet till A?

(b) Samma fråga då A är en 7×4-matris.

(c) Finns det någon matris A med rang 3 sådan att ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning för varje $\boldsymbol{b}$ i R^5? Motivera ditt svar. (6p)

Lycka till,
SJ

Svar: 1) a. $3\sqrt{3}/2$ b. $\pi/3$ 2) $x = 2, y = 5$, $\sqrt{30}/4$ 3) Ingen då $a = -2$, många då $a = 1$, annars entydig.

4) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ 5) $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{!0} = 3^8\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\{x^3 - 3x, \quad x^2 - 2x\}$.