Linjär algebra, moment 3:
Linjära ekvationssystem (kapitel 4 i J.P.)

Ekvationssystem på matrisform: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
A av typ $m \times n$, *koefficientmatris*
$\boldsymbol{x}$ av typ $n \times 1$, $\boldsymbol{b}$ av typ $m \times 1$, *kolonnmatriser* (*kolonnvektorer*)

Eliminationsmetoden

Några viktiga begrepp:

- *Utvidgad koeffisientmatris*, $M = (A|\boldsymbol{b})$.
- *Trappstegsmatris, pivotelement.*
- *Radekvivalens:* $M = (A|\boldsymbol{b}) \sim M' = (A'|\boldsymbol{b}')$.
- *Rangen* för en matris = antal rader i en radekvivalent trappstegsmatris.

Huvudsatsen för ekvationssystem. (Formulerad med Rangen.)
Antag typ$A$=$m \times n$. Då gäller
Om $rang(A|\boldsymbol{b}) > rang A$ så saknas lösningar.
Om $rang(A|\boldsymbol{b}) = rang A = n$ så har systemet en entydig lösning.
Om $rang(A|\boldsymbol{b}) = rang A = n - p$, $(p > 0)$, så har systemet p-parametrisk lösning.

Homogena system: Varje homogent system med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.

kvadratiska ekvationssystem

Sats: Följande villkor är ekvivalenta med varandra.
1) A är inverterbar.
2) det $A \neq 0$.
3) $A\boldsymbol{x} = 0$ har endast den triviala lösningen, $\boldsymbol{x} = 0$.
4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning för varje högerled $\boldsymbol{b}$. (Nämligen $A^{-1}\boldsymbol{b}$.)
5) A:s kolonner är *linjärt oberoende*.
6) Varje kolonnvektor i R^n är en entydig *linjärkombination* av kolonnerna i A.

Sats: Om A är av typ $n \times n$ så gäller: det $A = 0 \Leftrightarrow rang A < n$.

Jacobis metod: A inverterbar $\Leftrightarrow$ $(A|E) \sim (E|A^{-1})$.

Minsta kvadrat- metoden: $|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}|$ är minimal $\Leftrightarrow$ $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$.

Övningar

På tavlan: **4:** 5e, 6f, 7ad, 10bg, 14b, 16a, 20, 22c, 23, 28.
Öva själva: **4:** 1, 2a, 3c, 5ac, 6ce, 7b, 10ch, 15a, 18, 19, 22be.

Gruppuppgift: 4: 9, 14a.