Linjär algebra, Moment 5.
Egenvärnen, egenvektorer med tillämpningar, kap 7 samt 8.1-8.2

Ortogonala matriser: $P^tP = E$. Egenskaper, sats 2 och3.

Basbyte: Samband mellan komponenterna till en vektor $\boldsymbol{v}$ i två olika koordinatsystem xyz resp $\xi\eta\zeta$:

$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{pmatrix}$, där kolonnerna i P utgörs av xyz-komponenterna till $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\zeta$.

Motsvarande för **koordinatbyte:**

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$, där x_0, y_0, z_0 är xyz-koordinaterna för $\xi\eta\zeta$-systemets origo.

Egenvärden och egenvektorer.

Om A är en kvadratisk matris och $A\boldsymbol{g} = \lambda\boldsymbol{g}$, där $\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$ och λ är ett tal, så kallas $\boldsymbol{g}$ för en *egenvektor* till A. Talet λ kallas *egenvärde*.

- Egenvärdena är rötter till *sekularekvationen*: $det(A - \lambda E) = 0$,
  där A ar avbildningsmatrisen i någon bas.
- **Spektralsatsen:** Om A är en *symmetrisk* $n \times n$-matris så finns en ON–bas, $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$, bestående av egenvektorer till A, och om $P = (\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 \cdots \boldsymbol{g}_n)$ och $D = diag(\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n)$, där $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ är egenvärdena hörande till $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n$, så är
  $P^tAP = D$.

Anm. Vi hoppar över sats 2 och efterföjande exempel i avsnitt7.3.

Kvadratiska former: $q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz =$

$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}^t A\boldsymbol{r}$$

Huvudsatsen:
Genom att byta till en ON-bas bestående av egenvektorer till A så kommer den kvadratiska formen att överföras till *kanonisk form:*

$$q = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2.$$

där λ_1, λ_2, λ_3 är motsvarande egenvärden.

Tillämpningar på andragradskurvor.

Gruppuppgift till fr 11/10:
a) Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Bestäm egenvärdena och en ON-bas, $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, av egenvektorer till A.
b) Vad är den geometriska betydelsen av ekvationen $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$? Rita en figur.
c) Låt (ξ, η) vara koordinaterna i basen $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$.Bestäm xy-koordinaterna för de punkter som har $\xi\eta$-koordinaterna $(-1, 2)$, $(2, 1)$, resp. $(-3, 5)$.
d) Samma uppgift som c) men då vi tänker oss att vi dessutom har flyttat origo i $\xi\eta$-sysremet till punkten med xy-koordinaterna $(1, -1)$.

Övningar	På tavlan:	**7**: 5, 6, 9, 15, 16, 19, 22ad, 23a, 25. **8**: 1bd, 2b, 3a
	Själva:	**7**: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10ae, 22bef, 23d, 25b, 28. **8**: 1a, 2a, 3c.