Tentamen i Linjär algebra för V1 (TMA840)

2003 08 29 kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.
Telefon: Georgios Foufas, 0702-74 09 02
Obs! Ange linje och antagningsår samt namn och personnummer.

---

1. Avgör för vilka värden på parametern a som följande ekvationssystem har entydig lösning, många lösningar respektive ingen lösning. Ange också lösningsmängden i fallet många lösningar.
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + az = a \\ ax + 2y = -1 \end{cases}$$ (7p)

2. Givet linjen $x - 3 = y - 4 = z - 5$ och planet $x - 2y + 2z = 4$.

   (a) Bestäm skärningspunkten mellan linjen och planet. (2p)

   (b) Bestäm ekvationen för den rätvinkliga projektionen av linjen på planet. (6p)

3. Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Bestäm en bas för nollrummet till A. (2p)

   (b) Bestäm en bas för kolonnrummet till A. (4p)

4. Bestäm symmetriaxlarna för hyperbeln $7x^2 - 12xy - 2y^2 = 5$. Beräkna också kortaste avståndet från origo till en punkt på hyperbeln . (ON-system.) (6p)

5. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \quad C = \begin{pmatrix} 19 & -10 & 15 & 4 \\ 32 & -12 & 24 & 6 \end{pmatrix}.$$ (6p)

6. Punkterna $A = (1, 5, -2)$, $B = (3, 1, -6)$ och $R = (-1, 3, -10)$ är givna. Låt l vara linjen genom R och mittpunkten på sträckan AB. Vilka punkter C på linjen l har egenskapen att arean av triangeln ABC är lika med 1? (5p)

7. (a) Vad menas med att en matris är inverterbar? (1p)

   (b) Visa att om matriserna A och B är inverterbara så är också matrisen AB inverterbar. (2p)

   (c) Vad menas med att en matris är ortogonal? (1p)

   (d) Visa att om matriserna P och Q är ortogonala så är också matrisen PQ ortogonal. (2p)

Var god vänd!

8. Vilka av följande påståenden är falska? Ge motexempel till dessa. (Du behöver inte bevisa de korrekta.) (6p)

   (a) Om P är en ortogonalmatris så är $\det P = 1$.

   (b) Om P är en ortogonalmatris så är $P \sim E$. (Enhetsmatris)

   (c) Om A och B är matriser sådana att $AB = 0$ så är $A = 0$ eller $B = 0$.

   (d) Om vektorrummet V genereras av (spänns upp av) $\boldsymbol{v}_1$ och$\boldsymbol{v}_2$ så är $\dim V > 1$.

   (e) Om vektorrummet V genereras av (spänns upp av) $\boldsymbol{v}_1$ och$\boldsymbol{v}_2$ så är $\dim V \leq 2$.

   (f) Om kolonnerna i matrisen A är linjärt beroende så har ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = 0$ oändliggt många lösningar.

Lycka till,
SJ

Svar:
1) För $a = 1$, ∞ många: $(x, y, z) = (-1 - 2t, t, 3)$. Ingen lösning för $a = 2$. Övriga a ger entydig lösning.
2) a) $(2, 3, 4)$ b) $(x, y, z) = (2 + 8t, 3 + 11t, 4 + 7t)$.
3) a) $\{(-2, 1, 2, 0, 0)^t, (0, -1, 0, 2, 0)^t, (-1, 0, 0, 0, 1)^t\}$, b) $\{(1, 1, 2, 2)^t, (0, 2, 2, 4)^t\}$.
4) $y = 2x$ och $x = -2y$. kortaste avstånd: $1/\sqrt{2}$.
5) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
6) $(13/6, 3, -11/3)$ och $(11/6, 3, -13/3)$.
8) (a) f, (b) s, (c) f, (d) f, (e) s, (f) s.