

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Telefon: Patrik Lundström, ankn. 5325.

Obs! Ange linje och antagningsår samt namn och personnummer.

1. Fyra punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:

$$P_1 : (1, 1, -1), P_2 : (0, 1, 2), P_3 : (3, -1, 1), \text{ och } P_4 : (2, 1, 1).$$

- (a) Bestäm ekvationen för planet genom  $P_1, P_2$ , och  $P_3$ . (4p)  
 (b) Beräkna avståndet från detta plan till punkten  $P_4$ . (2p)

2. Låt  $F$  vara en linjär avbildning i planet som avbildar punkterna  $(4, -1)$  och  $(5, -2)$  på punkterna  $(2, 1)$  respektive  $(1, -1)$ .  
 (Koordinater m.a.p given bas.)

- (a) Bestäm avbildningsmatrisen för  $F$ . (4p)  
 (b) Visa att  $F$  är inverterbar och bestäm matrisen för  $F^{-1}$ . (2p)

3. Bestäm symmetrialarna för hyperbeln  $7x^2 - 12xy - 2y^2 = 1$ . Beräkna också kortaste avståndet från hyperbeln till origo.(ON-system) (6p)

4. En linjär avbildning  $f$  från  $R^5$  till  $R^4$  ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestäm en bas för värderummet till  $F$ . (4p)  
 (b) Bestäm en bas för nollrummet till  $F$ . (4p)

5. Bestäm avbildningsmatrisen för en spegling i planet  $x + 2y - 2z = 0$ . (ON-bas i rummet.) (6p)

6.  $V$  är ett euklidiskt rum med en ON-bas  $e = (e_1, e_2, e_3)$ .  $F$  är en symmetrisk linjär avbildning på  $V$  sådan att Nollrummet har dimension 2 och  $F(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$ .

Bestäm avbildningsmatrisen för  $F$  m.a.p. basen  $e$ . Ge en geometrisk tolkning av  $F$ . (6p)

7. Låt  $V$  vara ett linjärt rum.

- (a) Definiera vad som menas med en linjär avbildning från  $V$  till  $V$ . (1p)  
 (b) Antag att  $\dim V = 2$  och att  $(e_1, e_2)$  är en bas. Visa att (och hur)  $F$  kan framställas m.h.a. en  $2 \times 2$ -matris. (4p)

8. (a) Definiera skalärprodukten för geometriska vektorer. (1p)  
 (b) Redogör för hur skalärprodukten kan tolkas som en projektion. (2p)  
 (c) Formulera distributiva lagen för skalärprodukt. (1p)  
 (d) Härled formeln för skalärproduktens koordinatframställning i ON-bas. (3p)

**Svar:**

- 1) a)  $3x + 4y + z = 6$  b)  $5/\sqrt{26}$ . 4) a)  $\{(1, 0, -1, 0)^t, (-1, 1, 0, 0)^t, (0, 1, 1, 1)^t\}$ .  
 2) a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . b)  $\{(-1, -2, 0, 1, 0)^t, (0, 1, -1, 0, 1)^t\}$ .  
 3)  $x = -2y$ ,  $y = 2x$ . Avståndet:  $1/\sqrt{10}$ . 5)  $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ . 6)  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$