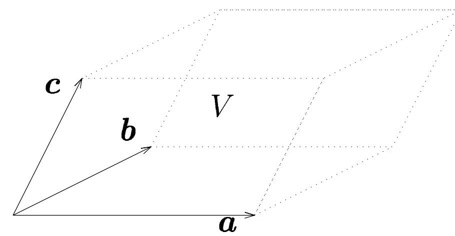
Vecko–PM Linjär algebra, moment 4. .

Kapitel 5.3-5.5, 13. i Tengstrand

Volym och determinanten för en 3×3-matris

$$V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \pm V$$



Några satser

- Räkneregler för volymfunktionen (sid 112).
- $det(AB) = det(A)det(A)$
- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ är inverterbar.
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$ (om A är inverterbar)

Volymfunktionen i $\boldsymbol{R}^n$ – Determinanter av n:te ordningen

- Räkneregler för determinanter.

  1) Spaltning.(113(i), 237(i))
  2) Utbrytning av faktor ur rad eller kolonn.(113(ii), 237(ii))
  3) Om två rader/kolonner byter plats så byter determinanten tecken.(113(iii), 237(iii))
  4) Om två rader/kolonner är lika så är determinanten = 0.(113(iv), 237(v))
  5) Tillåtna rad/kolonn–operationer.(237(vi))
  6) $det(A) = det(A^t)$ (115 sats 15, 240 sats 7)
  7) Utveckling efter rad och kolonn. (244 sats 8)

- Multiplikationssatsen för determinanter. (116 sats 14, 245 sats 9)
- Determinanter och ekvationssystem. (119 sats 17, 245 sats 10)
- Determinanten av invers matris. (119 sats 18, 246 sats 11)

vänd!

Gruppuppgift

1. Bevisa genom att använda räknereglerna för skalärprodukt och vektorprodukt att $V(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + V(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ om V är volymfunktionen (i 3 dimensioner).

2. Skriv ut denna likhet m.h.a. 3×3-determinanter om
   $\boldsymbol{u} = (1, 3, -1) \quad \boldsymbol{u}' = (-2, -1, 2) \quad \boldsymbol{v} = (2, 2, 1) \quad \boldsymbol{w} = (-1, 2, 1)$
   Beräkna de 3 determinanterna och verifiera att likheten stämmer i detta fall.

3. Motsvarande likhet i 2 dimensioner är $\begin{vmatrix} (a_1 + b_1) & c_1 \\ (a_2 + b_2) & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$
   och kan tolkas geometriskt som att
   (arean av den perallellogram som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$) =
   (arean av den perallellogram som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{c}$) +
   (arean av den perallellogram som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$)
   Arean skall här tolkas som areafunktionen dvs area med tecken. Rita en figur där man ser alla tre parallellogrammen i fallet
   $\boldsymbol{a} = (1, -1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1)$ och $\boldsymbol{c} = (0, -2)$.

Övningar

På tavlan: 5.11, 5.14. 13.2, 13.4.

Öva själva: 5.3, 5.4, 5.12, 5.17, 5.19, 13.1ab, 13.3, 13.5.