Vecko–PM Linjär algebra, moment 5.

Kapitel 7.1 – 7.5, 11, 14.1–2,14.5. i Tengstrand.

Linjära avbildningar.

En funktion (avbildning) från rummet till rummet kallas *Linjär avbildning* om
a) $F(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda F(\boldsymbol{u})$ (homogen)
b) $F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$ (additiv)

Exempel: Projektioner, speglingar, rotationer.

Matrisframställning av en linjär avbildning.

Låt $\mathbf{e} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ vara en bas för rummet. Låt A vara den 3×3-matris vars kolonner består av koordinaterna till $F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), F(\boldsymbol{e}_3)$ med avseende på basen $\mathbf{e}$.
(Detta kan skrivas $F(\mathbf{e}) = \mathbf{eA}$, där $F(\mathbf{e}) = (\mathbf{F}(\boldsymbol{e_1}), \mathbf{F}(\boldsymbol{e_2}), \mathbf{F}(\boldsymbol{e_3}))$.)
Om då $\boldsymbol{u}$ har koordinaterna $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, och $F(\boldsymbol{u})$ har koordinaterna $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,
dvs $\boldsymbol{u} = \mathbf{eX}$ och $F(\boldsymbol{u}) = \mathbf{eY}$ så är $Y = AX$.

Volymförändring: Om A är matrisen för F i någon bas så är

$V(F(\boldsymbol{u}_1), F(\boldsymbol{u}_2), F(\boldsymbol{u}_3)) = (detA)V(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$

Sammansättning: $H(\boldsymbol{u}) = F(G(\boldsymbol{u}))$.

Om F ges av matrisen A och G av matrisen B så ges den sammansatta avbildningen H av matrisen AB.

Invers avbildning Om A är matrisen för F i någon bas så gäller:

F inverterbar $\Leftrightarrow F(\boldsymbol{u}) = 0$ endast för $\boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow detA = 0$. F^{-1} ges då av A^{-1}

Nollrum, värderum och dimensiossatsen

$dim(D(F)) = dim(V(F) + dim(N(F))$

Definition av Vektorrum (Linjärt rum) Sid 217.

$\boldsymbol{R}^n$, mängden av n-tipler av reella tal är ett vektorrum.

Underrum: Om V är ett vektorrum och U är en delmängd sådan att
$\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v} \in U \Rightarrow \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \in U$ så är U ett *Underrum* till V.

Bas–begreppet:

$M = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ kallas för en *bas* för V om $\begin{cases} \text{M är linjärt oberoende.} \\ \text{M spänner upp } V. \end{cases}$

V.g. vänd.

Satser

- Entydig koordinatframställning m.a.p. en bas
- Om V spänns upp av m st element så är fler än m element ur V linjärt beroende.
- Alla baser för V har samma antal element. Detta antal kallas för *dimensionen* av V.
- En linjärt oberoende mängd kan utvidgas till en bas.

Linjära avbildningar allmänt (14.1-14.2)

- Matrisframställning i en bas.
- Sats 15 sid 253.
- Nollrum, Värderum, Dimensionssatsen.

Minsta–kvadratmetoden (14.5)

De $\boldsymbol{x}$ som minimerar $|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ är lösningar till systemet $A^tA\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$
Det senare systemet har alltid lösning.

Gruppuppgift:
1) Låt P_1 och P_2 vara de rätvinkliga projektionerna på planen $x + y + 2z = 0$ respektive $x + y = 0$. Bestäm matriserna för $P_1 \circ P_2$ och $P_2 \circ P_1$.
2) Lös uppgift 14.10.

Övningar	På tavlan:	**7**.2, 10, 8, 9, 15, 16a, **11**.1, 2, 9, **14**.4, 5.
	Själva:	**7**.3, 1, 4, 5, 6, 14, 16bc, **11**.3, 6, 8, **14**.1, 3, 6.