

Linjär Algebra V1 (tmv841)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Bonuspoäng från duggor 05/06 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (05/06) webbsida 18/1 .

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) ett blad.

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. (2p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ på $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ då $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ -1 \ 1]^T$. (2p)

(c) Beräkna $F(\mathbf{v})$ för $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ då $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är den linjära avbildning som ges av (3p)

$$F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ och } F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Ange en bas för $\text{Nul}(A)$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Ange en bas för $\text{Col}(B)$ då $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ange $\dim(\text{Nul}(B))$. (3p)

(f) Ange vilka av följande vektorer: $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ -1 \ 1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ och $\mathbf{v}_3 = [1 \ 1 \ -1 \ -2]^T$, som är egenvektorer till matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 5 \\ -5 & -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}. \text{ Ange också motsvarande egenvärden.}$$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Bestäm LU -faktoriseringen till matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (5p)

3. (a) Visa att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till ekvationssystemet ovan. (5p)

Var god vänd!

4. $\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}_1 = [1 \ 2 \ 3]^T, \mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 0]^T, \mathbf{v}_3 = [1 \ 0 \ 2]^T \}$ är en bas för (6p)

\mathbb{R}^3 . I denna bas är $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ avbildningsmatris för den linjära avbildningen

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Bestäm $T(\mathbf{v})$ (i standardbas) då $\mathbf{v} = [0 \ 0 \ 5]^T$ (också i standardbas).

5. Låt \mathbb{P}_3 vara vektorrummet av polynom av grad högst 3. Låt U_1 vara det underrum (6p)
av \mathbb{P}_3 vars element är alla polynom p som uppfyller $p(-1) = p(1)$. Låt U_2 vara det
underrum av U_1 vars element dessutom uppfyller $p(1) = 0$.

Bestäm först en bas för U_2 , fyll ut den till en bas för U_1 och slutligen till en bas för
hela \mathbb{P}_3 .

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte (6p)
motiviera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p
totalt.

(a) För alla matriser A gäller att $A^T A$ är en symmetrisk matris.

(b) Om \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så är även
 $0.2\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2$ lösning till detta ekvationssystem.

(c) Om kolonnvektorerna i matrisen A är linjärt beroende, så kan inte ekvations-
systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha entydig lösning för någon vektor \mathbf{b} .

(d) Det finns en 4×7 -matris A sådan att $\dim(\text{Nul}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$.

(e) Alla kvadratiska matriser kan diagonaliseras.

(f) Om matrisen A har fler kolonner än rader, så är $\det(A^T A) = 0$.

7. (a) Definiera begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i \mathbb{R}^n . (1p)

(b) Visa med definitionens hjälp, att varje mängd av vektorer i \mathbb{R}^n som innehåller (2p)
nollvektorn, är en *linjärt beroende mängd av vektorer*.

(c) Bevisa, att varje mängd bestående av fem vektorer i \mathbb{R}^4 , är linjärt beroende. (3p)

Lycka till!
Sven