

Linjär Algebra V1 (TMA 841)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på Matematiskt Centrum första arbetsdagen efter tentamenstillfället.

Rättningsprotokoll anslås på Matematiskt Centrum ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) ett blad.

(a) Ange rangen för matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (2p)

(b) Bestäm en bas för nollrummet, $NulA$ (A som ovan), och skriv sedan ner lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, då $\mathbf{b} = [2 \ 2 \ 4 \ -2]^T$. (3p)

(c) Bestäm inversen till matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

(d) LU-faktorisera matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) Om man i Matlab skriver (2p)

```
>> r = [1 1 2 2 3]; k = [1 4 1 3 5]; e = [1 2 -2 3 7];
```

```
>> S = sparse(r,k,e);
```

och till sist

```
>> A = full(S)
```

Vilken matris A erhåller vi då?

(f) Matrisen $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 2. (2p)

Bestäm motsvarande egenvektorer.

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$ (4p)

(b) Antag att en partikel rör sig i ett kraftfält och att dess lägesvektor \mathbf{x} satisfierar (3p)
differentialekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ där A är som ovan och $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lös detta begynnelsevärdesproblem.

3. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + b \cdot t$ (6p)
till följande data

$$\begin{array}{c|cccc} t_i & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_i & -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$

4. Planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = [1 \ -1 \ 0]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [2 \ 0 \ -1]^T$. Bestäm en ON-bas för planet och sedan matrisen för projektionen av en vektor \mathbf{x} på detta plan. (6p)

5. Avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ definieras av (6p)

$$T(p(t)) = \int_0^t p(s)(s+1)ds.$$

- (a) Visa att T är en linjär avbildning.
(b) bestäm matrisen M för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.
(c) Bestäm koordinaterna för $T(1 - 2t + 3t^2)$ i basen \mathcal{C} med hjälp av en matrismultiplikation med M ovan.
6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

- (a) Om en utökad matris reduceras till trappstegsform och sista raden i denna är $[0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 0]$ så är det associerade ekvationssystemet inte lösbart.
(b) Om A är en 3×4 matris så kan avbildningen $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ inte vara en-entydig (injektiv).
(c) Om A och B båda är inverterbara $n \times n$ matriser så är $\mathbf{x} = A^{-1}B^{-1}$ en lösning till matrisekvationen $AX = XB$.
(d) Det är möjligt att konstruera en 3×4 matris A sådan att $\dim \text{Col } A = 2$ och $\dim \text{Nul } A = 2$.
(e) Om kolonnerna i en $n \times n$ matris är linjärt oberoende så måste också raderna vara det.
(f) Om $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ för alla \mathbf{x} och \mathbf{y} i \mathbb{R}^n , så måste kolonnerna i A vara ortonormerade.

7. Formulera och bevisa Pythagoras sats i \mathbb{R}^n . (6p)

Lycka till!
Sven