9:31**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: inga, ej heller räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2006-01-07 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Christoffer Cromvik , tel. 0739779268

Linjär Algebra V1 TMA 841.

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.
Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. **Skriv svaren tydligt och i ordning på** (om möjligt) **ett blad**.

   (a) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$? (2p)

   (b) Matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1. Ange en motsvarande egenvektor. (2p)

   (c) Avgör om matriserna är inverterbara: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$,
   $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

   (d) A är matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. Matlab-komandot `>> B = rref(A)` ger resultatet
   $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ange rangen för A samt en bas för kolonnrummet till A. (2p)

   (e) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

   (f) En linjär avbildning $\boldsymbol{F}$ från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^2$ avbildar $[1,0,0]^t$ på $[2,3]^t$, $[0,1,0]^t$ på $[0,1]^t$ och [0,0,1] på [2,-1]. Ange avbildningsmatrisen för $\boldsymbol{F}$. (2p)

   Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

2. Lös matrisekvationen $AA^tX = X + AB^T$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. (6p)

3. Lös approximativt med minsta-kvadratmetoden ekvatonssystemet
   $$\begin{cases} x &= 1 \\ x &= 2 \\ y &= 1 \\ y &= 2 \\ x+y &= 1 \end{cases}$$
   . Beräkna också medelfelet. (6p)

   OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

4. Ange vilken typ av kurva följande ekvation beskriver (6p)
   $$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5$$
   Skissa också i grova drag kurvan (markera särskilt symmetriaxlar).

5. Avbildningen $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ (polynom av grad högst 3) definieras av $T(p(t)) = p''(t) - p(t)$ (6p)

   (a) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på den naturliga basen $\{1, t, t^2, t^3\}$.

   (b) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på basen $\{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$.

   (c) Ange sambandet mellan de två avbildningsmatriserna med hjälp av transformationsmatrisen för basbytet.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   (a) Om A är en 5×3 - matris så är rangen för A högst 3.

   (b) Om kolonnerna i A är parvis ortogonala så är $A^T A = I$ (enhetsmatrisen).

   (c) Om A är en kvadratisk matris med $\det A = 0$ så är $\lambda = 0$ ett egenvärde till A

   (d) Om en matris A är diagonaliserbar så är A symmetrisk.

   (e) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A = A^T B$ minst en lösning.

   (f) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A = A^T B$ högst en lösning.

7. (a) Definiera vad som menas med en symmetrisk matris. (1p)

   (b) Definiera begreppen egenvärde och egenvektor till en matris (2p)

   (c) Visa att om A är symmetrisk så är egenvektorer som hör till olika egenvärden ortogonala mot varandra. (4p)

Lycka till!
Sven