VEKTORRUM

En **linjär avbildning** T från ett vektorrum V till ett vektorrum W är en regel som till varje vektor $x \in V$ ordnar en entydigt bestämd vektor $T(x) \in W$ sådan att

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$ för alla u, $v \in V$;
- $T(cu) = cT(u)$ för alla $u \in V$ och alla skalärer c.

Kärnan till en linjär avbildning $T : V \to W$ är mängden av alla $u \in V$ sådana att $T(u) = 0$.

Värdemängden till T är mängden av alla $w \in W$ som är bild av någon vektor $x \in V$.

Om $T(x) = Ax$ så är kärnan till T samma som nollrummet till A och värdemängden samma som kolonnrummet.

En mängd av vektorer $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ i V kallas **linjärt oberoende** om ekvationen

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_pv_p = 0$$

endast har trivial lösning $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$. Vektorerna kallas **linjärt beroende** om ekvationen ovan har icketrivial lösning.

Låt H vara ett vektorrum. En mängd av vektorer $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ i H kallas en **bas** för H om

- (i) $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd;
- (ii) Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är hela rummet H, dvs

$$H = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_p\}.$$

Sats 10 Om ett vektorrum V har en bas som består av n vektorer så består alla baser för V av precis n vektorer. Talet n kallas **vektorrumets dimension.**

Det finns vektorrum som inte spänns upp av ändligt antal vektorer. Sådana kallas oändligtdimensionella.

Sats 5. Låt $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ vara en mängd av vektorer i V och låt

$$H = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$$

- Om en av vektorerna i S, t.ex. v_k är en linjär kombination av de övriga så kan den tas bort från S, de återstående spänner också upp H.
- Om $H \neq \{0\}$ så är någon delmängd av S en bas för H.

Bevis.

Bas för nollrummet till en matris A: Lös ekvationssystemet $Ax = 0$. Identifiera vektorerna som spänner upp nollrummet.

Sats 6. Bas för kolonnrummet till A**.** Pivotkolonnerna i A bildar en bas för $\mathrm{Col}(A)$.

Bevis. Låt $B = [b_1 \dots b_n]$ vara reducerad trappstegsform av A. Pivotkolonnerna, $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\}$, i B är linjärt oberoende. Eftersom $A = [a_1 \dots a_n]$ är radekvivalent med B, blir pivotkolonnerna $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ i A också linjärt oberoende, ty om $c_1 a_{i_1} + \dots + c_k a_{i_k} = 0$ för några vikter $c_1, \dots c_k$ så $c_1 b_{i_1} + \dots + c_k b_{i_k} = 0$. Enligt samma argument har vi att varje icke-pivot kolonn i A är en linjär kombination av pivotkolonnerna i A. Därför kan icke-pivot kolonner tas bort, de återstående spänner också upp $\mathrm{Col}(A)$.

Bas och koordinater. Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ vara en bas för H.

Vilkoret (ii) i basdefinitionen medför att varje vektor $u \in H$ kan skrivas som en linjär kombination av $b_1, \dots, b_p$:

$$u = c_1 b_1 + \dots c_n b_p \tag{1}$$

Av (i) följer att denna framställning är entydig, ty om

$$u = d_1 b_1 + \dots + d_p b_p$$

vore en annan framställning, så kunde man dra den ifrån (1) och få

$$0 = (c_1 - d_1) b_1 + \dots + (c_p - d_p) b_p.$$

Eftersom $b_1, \dots . b_p$ är linjärt oberoende, ger detta $c_1 = d_1, \dots c_p = d_p$. Koefficienterna i (1) kallas **koordinaterna** för vektorn u i basen $\mathcal{B}$. Vi har bevisat alltså

Sats 7. Antag att $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p\}$ är en bas för H. Då finns till varje vektor $u \in H$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \dots, c_p$ sådana att $x = c_1 b_1 + \dots + c_p b_p$.

Om $c_1, \dots, c_p$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för x så kallas vektorn i $\mathbb{R}^p$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för** x **(relativt basen** $\mathcal{B}$**)** eller $\mathcal{B}$**-koordinatvektorn**.

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och

$$P_{\mathcal{B}} = [b_1, \dots, b_n].$$

Vektorekvationen $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$ är ekvivalent med

$$x = P_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}.$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas för **basbytesmatrisen** från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Eftersom $P_{\mathcal{B}}$:s kolonner är linjärt oberoende är $P_{\mathcal{B}}$ inverterbar och

$$P_{\mathcal{B}}^{-1} x = [x]_{\mathcal{B}}.$$

Sats 8 Låt $\mathcal{B}$ vara en bas för vektorrum V. Då är koordinatavbildningen $T : V \to \mathbb{R}^n$ som ges av $x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$ en bijektiv (injektiv och surjektiv) linjär avbildning. En bijektiv linjär avbildning kallas **isomorfi**.