BAS. DIMENSION AV VEKTORRUM.

Varje vektorrum med bas bestående av n vektorer är isomorf med vektorrumet $\mathbb{R}^n$.

Följande resultat är en generaliseringen av respektive resultat för $\mathbb{R}^n$.

Sats 9 Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ så måste varje mängd bestående av fler än n vektorer i V vara linjärt beroende.

Bevis. Låt $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$, $p > n$ vara en mängd av vektorer i V. Då blir koordinatvektorerna $[u_1]_\mathcal{B}, \ldots, [u_p]_\mathcal{B}$ linjärt beroende i $\mathbb{R}^n$. Därför finns vikter $c_1, \ldots, c_p$ (ej alla noll) sådana att

$$c_1[u_1]_\mathcal{B} + \ldots c_p[u]_\mathcal{B} = 0.$$

Eftersom $c_1[u_1]_\mathcal{B} + \ldots c_p[u]_\mathcal{B} = [c_1u_1 + \ldots + c_pu_p]_\mathcal{B}$ får vi $c_1u_1 + \ldots + c_pu_p = 0$ (koordinatavbildningen är injektiv). Detta visar att $u_1, \ldots, u_p$ är linjärt beroende.

Sats 10 Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, så måste varje bas för V bestå av n vektorer.

Bevis. Låt $\mathcal{B}_1$ vara en annan bas. Då kan det inte bestå av fler än n vektorer, ty annars blir de linjärt beroende enligt Sats 9. Antalet dessa vektorer kan inte blir mindre än n ty annars vektorerna i basen $\mathcal{B}$ blir linjärt beroende.

Def. Om V spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V **ändligtdimensionellt.** V:s **dimension**, dim V är antalet vektorer i en bas för V. Om V endast innehåller nollvektorn $V = \{0\}$ så är dim$V = 0$. Om V inte spänns upp av en ändlig mängd av vektoerer, så kallas V **oändligtdimensionellt.**

Sats 11. Låt H vara ett underrum i ett ändligtdimensionellt vektorrum V. Då kan varje linjärt oberoende mängd av vektorer i H, som inte redan spänner upp H, utökas till en bas för H. Vidare är H också ändligtdimensionellt och dim $H \leq$ dim V.

Sats 12. Bassatsen. Låt V vara ett p-dimensionellt vektorrum $p \geq 1$. Då är varje linjärt oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för V. Varje mängd bestående av exakt p vektorer som spänner upp V är också automatiskt en bas för V.

---

dim Nul(A)=antalet fria variabler i ekvationen $Ax = 0$
dim Col(A)=antalet pivotkolonner i A.

RANK

Låt A vara $m \times n$-matris. Varje rad i A har n koordinater och därför kan identifieras med en vektor i $\mathbb{R}^n$. Linjära höljet av alla radvektorer i A kallas för **radrummet** , Row A, för A.

Elementära rad operationer förändarar inte radrummet. Alltså om A och B är radekvivalenta så är Row $A =$ Row B.

Sats 13. Om två matriser A och B är radekvivalenta så är Row $A =$ Row B. Om U är en trappstegsform av A så är pivotraderna i U en bas för Row A.

Bevis.

Sats 6 och Sats 13 ger nu att

$$\text{dim Row } A = \text{dim Col } A.$$

Def. Dimensionen av Row A kallas rangen för A, rank A.

Sats 14. Dimensionssatsen. Låt A vara en $m \times n$-matris. Då

$$\text{rank } A + \text{dim Null } A = n$$

Bevis. rank $A = \{$antalet pivotrader i$A\} = \{$antalet pivot kolonner i $A\}$.

dim Nul $A = \{$antalet fria variabler$\} = \{$antalet icke-pivot kolonner i $A\}$. Detta ger

$$\begin{aligned}
&\text{rank } A + \text{dim Nul } A \\
&= \{\text{antalet pivot kolonner i } A\} + \{\text{antalet icke-pivot kolonner i } A\} \\
&= \{\text{antalet kolonner i } A\} = n
\end{aligned}$$

Satsen om inverterbara matriser (försättning) Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta med påståendet att A är inverterbar.

- m. Kolonnerna i A bildar en bas i $\mathbb{R}^n$;
- n. Col $A = \mathbb{R}^n$;
- o. dim Col $A = n$;
- p. rank $A = n$;
- q. Nul $A = \{0\}$;
- r. dim Nul $A = 0$.
