BASBYTE

Antag att $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ är en bas för H. Då finns till varje vektor $u \in H$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \ldots, c_p$ sådana att $x = c_1 b_1 + \ldots + c_p b_p$. $c_1, \ldots, c_p$ kallas koordinaterna för x realtivt basen $\mathcal{B}$

Om $c_1, \ldots, c_p$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för x så kallas vektorn i $\mathbb{R}^p$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för** x **(relativt basen** $\mathcal{B}$**)** eller $\mathcal{B}$**-koordinatvektorn**.

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och

$$P_{\mathcal{B}} = [b_1, \ldots, b_n].$$

Vektorekvationen $x = c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n$ är ekvivalent med

$$x = P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}.$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas för **basbytesmatrisen** från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Sats 15. Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ och $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ vara baser för vektorrummet V. Då finns en entydigt bestämd $n \times n$-matris $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ sådan att

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}.$$

Kolonnerna i $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ är koordinatevektorerna för vektorerna i basen $\mathcal{B}$ relativt basen $\mathcal{C}$. Altså

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[b_1]_{\mathcal{C}}[b_2]_{\mathcal{C}} \ldots [b_n]_{\mathcal{C}}]$$

Basbyte i $\mathbb{R}^n$. Om $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ och $\mathcal{E}$ är standardbas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ så $[b_i]_{\mathcal{E}} = b_i$ och

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}} = [b_1 \ldots b_n].$$

Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ och $\{c_1, \ldots, c_n\}$ vara baser fir $\mathbb{R}^n$. Låt

$$P_{\mathcal{B}} = [b_1 \ldots b_n]$$

och

$$P_{\mathcal{C}} = [c_1 \ldots c_n]$$

Då är

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{C}})^{-1} P_{\mathcal{B}}.$$

EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

Ex.1 T spegling i planet π: $ax + by + cz = 0$. Låt $\mathbf{n}$ vara en normal till π. Då $T(\mathbf{n}) = -\mathbf{n} = (-1)\mathbf{n}$ och $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ för alla $\mathbf{v} \in \pi$.

2. $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Me_1 = 2e_1$, $Me_2 = 3e_2$.

3. $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Me_1 = 2e_1$, men $Me_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ är inte parallell med e_2.

Def. En **egenvektor** till en $n \times n$-matris A är en vektor $x \neq 0$ så att Ax är parallell med x, dvs

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

för något tal λ.

Ett tal λ kallas **egenvärde** om det finns en vektor $x \neq 0$ så att (1) gäller. Varje sådant x sägs vara en egenvektor till egenvärdet λ.

Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning sägs x vara en egenvektor till egenvärdet λ om

$$T(x) = \lambda x, x \neq 0.$$

Ex.1 **n** är en egenvektor till egenvärdet -1, varje **v** i π är en egenvektor till egenvärdet 1.

2. e_1 är en egenvektor till egenvärdet 2, e_2 är inte en egenvektor.

OBS1 λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I)x = 0$ har en icke-trivial lösning.
OBS2 Om v är en egenvektor så är μv, $\mu \neq 0$, också en egenvektor.

Def. Om λ är ett egenvärde kallas mängden av alla lösningar till $(A - \lambda I)x = 0$ för egenrummet till egenvärdet λ $(= Nul(A - \lambda I))$.

Ex.1 Linjen L genom origo som är ortogonal mot planet π är egenrummet till egenvärdet -1 för speglingen i planet π. π är egenrummet till egenvärdet $+1$.

4. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Visa att 2 är ett egenvärde och bestäm motsvarande egenrum!

Karakteristiskekvation.

λ är ett egenvärde till $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ (den karakteristiska ekvationen), ty

λ är ett egenvärde $\Leftrightarrow$ $(A - \lambda I)x = 0$ har en icke-trivial lösning $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ex.4 Sök alla egenvärden till A från Ex.4:

Se bild som beskriver vad $x \mapsto Ax$ ger.

Sats 2. Om $v_1, \ldots, v_r$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en $n \times n$-matris A så är $\{v_1, \ldots, v_r\}$ linjärt oberoende.

Bevis. Om $\{v_1, \ldots, v_r\}$ är linjärt beroende så finns ett minsta p så att v_{p+1} är en linjär kombination av $v_1, \ldots, v_p$ dvs

$$v_{p+1} = c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p \tag{2}$$

Då är $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linjärt oberoende, ty annars finns $j < p$ så att v_{j+1} är en linjär kombination av $v_1, \ldots, v_j$, vilket strider mot beskrivningen av p. Om nu $Av_k = \lambda_k v_k$ så ger (2) att

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = Av_{p+1} = c_1 Av_1 + \ldots + c_p Av_p = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots c_p \lambda_p v_p \tag{3}$$

och

$$\lambda_{p+1} v_{p+1} = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots c_p \lambda_p v_p \tag{4}$$

$(2) - (4)$ ger

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) v_1 + \ldots c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) v_p$$

Att $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är linjärt oberoende ger

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = \ldots = c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}) = 0$$

Men $\lambda_1 - \lambda_{p+1} \neq 0, \ldots, \lambda_p - \lambda_{p+1} \neq 0$ ger

$$c_1 = \ldots = c_p = 0$$

Men då ger (2) att $v_{p+1} = 0$ vilket är orimligt eftersom en egenvektor $\neq 0$.

Sats 4 Om A och B är två $n \times n$-matriser och om det finns en inverterbar $n \times n$-matris P så att

$$A = PBP^{-1}$$

så har A och B samma egenvärden.

Bevis.

$$\det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) =$$
$$\det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1}$$

Men $\det P \det P^{-1} = \det(PP^{-1}) = \det I = 1$, så

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$