DIAGONALISERING

Sats 5. En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.

$A = PDP^{-1}$, eller $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris,

$$\Leftrightarrow$$

kolonnerna i P är n linjärt oberoede egenvektorer till A.

I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorerna i P).

Bevis. Vi observerar först att om P är en $n \times n$-matris med kolonner $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ och om D är en diagonalmatris med diagonalelement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ så

$$AP = A[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1 \ldots A\mathbf{v}_n] \tag{1}$$

medan

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] \tag{2}$$

Antag att A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$. Då $AP = PDP^{-1}P = PD$. (1) och (2) ger

$$[A\mathbf{v}_1 A\mathbf{v}_2 \ldots A\mathbf{v}_n] = [\lambda\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] \tag{3}$$

och

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n \tag{4}$$

Eftersom P är inveterbar måste kolonnerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vara linjärt oberoende. Vi har alltså visat ”endast om” delen, dvs A är diagonaliserbar $\Rightarrow$ A har n linjärt oberoende egenvektorer.

Antag nu att A har n linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ som svarar egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. För $P = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n]$ och $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ får vi enligt (1)-(3) att $AP = PD$. Vidare, eftersom P är inverterbar (kolonnerna i P är linjärt oberoende) är

$$A = PDP^{-1}.$$

Ex.1 Diagonalisera matrisen $A = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

Sats 6. Om $n \times n$-matrisen A har olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Bevis. Följer ur sats 2 och sats 5 (kapitel 5).

EGENVEKTORER OCH LIJÄRA AVBILDNINGAR

En **linjär avbildning** T från ett vektorrum V till ett vektorrum W är en regel som till varje vektor $x \in V$ ordnar en entydigt bestämd vektor $T(x) \in W$ sådan att

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$ för alla u, $v \in V$;
- $T(cu) = cT(u)$ för alla $u \in V$ och alla skalärer c.

Antag att $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ är en bas för vektorrummet V. Antag att $\mathcal{C}$ är en bas för vektorrummet W och att $T : V \to W$ är en linjär avbildning.

Vad är det för sambandet mellan $[x]_{\mathcal{B}}$ och $[T(x)]_{\mathcal{C}}$?

Bilda matrisen

$$M = [[T(b_1)]_{\mathcal{C}} \dots [T(b_n)]_{\mathcal{C}}]$$

Då är

$$[T(x)]_{\mathcal{C}} = M[x]_{\mathcal{B}}$$

Matrisen M kallas **avbildningsmatrisen för T relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$**

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ med standardbaser i båda fallen och $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så är M den vanliga avbildningsmatrisen, standardmatrisen, från kapitel 1.9. Alltå $M = A$ där $T(x) = Ax$.

Ett sätt att åskadliggöra likheten $[T(x)]_{\mathcal{C}} = M[x]_{\mathcal{C}}$ är med så kallat kommutativt diagram:

Ex.2 Låt T vara spegling i planet $\pi : ax + by + cz = 0$. Låt $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ vara två icke-parallella vektorer i planet och låt $\mathbf{n}$ vara en normal till π. Då bildar $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{n}$ en bas $\mathcal{B}$ i $\mathbb{R}^3$. Avbildningsmatrisen för T relativt $\mathcal{B}$ är

$$M = [[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{n})]_{\mathcal{B}}] = [[\mathbf{v_1}]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{v_2}]_{\mathcal{B}}\ [-\mathbf{n}]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Två frågor om avbildningsmatriser.

- 1. Antag att vi känner avbildningsmatrisen för $T : V \to W$ relativt baser som naturliga för T men kanske inte för V eller W. Hur hittar vi avbildningsmatrisen för T relativt andra baser?
- 2. Antag att vi känner avbildningsmatrisen för $T : V \to W$ som är naturliga för V och W men inte för T. Hur hittar vi baser för V och W som är naturliga för T och vilket samband gäller mellan avbildninsmatriserna?

Antag att $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av matrisen A, $T(x) = Ax$, och M är avbildningsmatrisen för T relativt baser $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^m$, dvs

$$[T(x)]_{\mathcal{C}} = M[x]_{\mathcal{B}}$$

Då är $x = P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$, $[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}x$ och $T(x) = P_{\mathcal{C}}[T(x)]_{\mathcal{C}}$ varav

$$Ax = T(x) = P_{\mathcal{C}}[T(x)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}M[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}}MP_{\mathcal{B}}^{-1}x$$

varav

$$A = P_{\mathcal{C}}MP_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Detta resonemang kan genaraliseras:

Antag att vi har två olika baser, $\mathcal{B}_{\mathbf{1}}$ och $\mathcal{B}_{\mathbf{2}}$, för vektorrumet V och två baser $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ för vektorrummet W. Om $T : V \to W$ är en linjär avbildning har vi alltså två avbildningsmatriser för T, dels M_1 relativt $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{C}_1$, dels M_2 relativt $\mathcal{B}_2$ och $\mathcal{C}_2$. Sambandet mellan dessa matriser ges då av

$$M_2 = P_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{C}_1} M_1 P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$$