

ORTOGONALITET. ORTOGONALPROJEKTION

En mängd av vektorer kallas en **ortogonalmängd**, om vektorerna i mängden är parvis ortogonala.

En mängd av vektorer kallas en **ortonormerad** mängd eller en **ON-mängd**, om den är en ortogonalmängd, vars samtliga vektorer är normerade.

En ortogonalmängd som är en bas för ett linjärt rum, kallas en **ortogonalbas**. Om basen är en ON-mängd, kallas den en **ON-bas**.

Ex.1 Med $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ har vi att $u_1 \cdot u_2 = 0$, $u_1 \cdot u_3 = 0$ och $u_2 \cdot u_3 = 0$. $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ är således en ortogonal mängd och alltså, enligt sats 4, en ortogonal bas för $H = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$\|u_1\| = \sqrt{6}, \|u_2\| = \sqrt{9} = 3, \|u_3\| = \sqrt{21}.$$

$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}u_1, \frac{1}{3}u_2, \frac{1}{\sqrt{21}}u_3 \right\}$ är en ON-bas för H .

Sats 5. Låt $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_p\}$ vara en ortogonal bas för ett underrum W i \mathbb{R}^n . Låt y vara en vektor i W .

Koordinaterna för y relativ basen \mathcal{B} , $[y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ ges då av

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$$

Om \mathcal{B} är en ortonormerad bas ges koordinaterna av

$$c_j = y \cdot u_j$$

Bevis. Varje vektor y är en linjärkombination av u_1, \dots, u_n , så att

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \quad (1)$$

för vissa tal c_1, \dots, c_n . Multiplicera (1) skalärt med u_j , $1 \leq j \leq n$, så fås

$$y \cdot u_j = \sum_{i=1}^n c_i u_i \cdot u_j = c_j u_j \cdot u_j$$

varav

$$c_j = \frac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}.$$

Om \mathcal{B} är en ON-bas, så är $u_j \cdot u_j = 1$ och $c_j = y \cdot u_j$.

Ex.2.. Låt S , \mathcal{B} och H vara enligt föregående exempel och låt $y = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Man kan visa att $y \in H$ (Hur?).

Nu har vi att $y \cdot u_1 = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 12$, $y \cdot u_2 = 27$, $y \cdot u_3 = 21$. Enligt satsen är

$$[y]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

där $c_1 = \frac{12}{6} = 2$, $c_2 = \frac{27}{9} = 3$, $c_3 = \frac{21}{21} = 1$.

Sats 11. Gram-Schmidt ortogonaliseringsprocedur. Låt W vara ett underrum i \mathbb{R}^n . Då har W en ON-bas. Låt $\{u_1, \dots, u_p\}$ vara en bas för W . Sätt

$$\begin{aligned}v_1 &= u_1 \\v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\&\vdots \\v_p &= u_p - \frac{u_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_p \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \dots - \frac{u_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}} v_{p-1}\end{aligned}$$

Då är $\{v_1, \dots, v_p\}$ en ortogonal bas för W och $\{v_1/\|v_1\|, \dots, v_p/\|v_p\|\}$ är en ON-bas. Dessutom gäller att

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\} \text{ för } 1 \leq k \leq p$$

Bevis.

Ex.3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ Bestäm ortogonal bas för

$\text{Col}(A)$.

Ortogonalprojektion

I många sammanhang har man ett underrum U av \mathbb{R}^n , och man vill kunna dela upp en given vektor $u \in \mathbb{R}^n$ som $u = u' + u''$, där $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$.

Låt $y \neq 0$ vara en given vektor i \mathbb{R}^n och $U = \text{Span}\{y\}$. $u' \in U$ omm $u' = \lambda y$ får något λ . För $u \in \mathbb{R}^n$ existerar ett entydigt $u' \in U$ så att $u - u' = u'' \in U^\perp$. Denna ges av

$$u' = \left(\frac{u \cdot y}{y \cdot y} \right) y \text{ och } u'' = u - u'$$

Notera att u' är parallell med linjen U genom origo med riktningsvektor y . Därför är u' en projektion av u på U . Man använder ibland beteckningen $\text{proj}_y u$ eller $\text{proj}_U u$ för projektionen.

Bevis. En enkel kalkyl ger att

$$u'' \cdot y = (u - u') \cdot y = u \cdot y - \left(\frac{u \cdot y}{y \cdot y} \right) y \cdot y = 0$$

Ex.4.

Sats 8. Satsen om ortogonal uppdelning. Låt W vara ett underrum. Då kan varje vektor $u \in \mathbb{R}^n$ skrivas, på exakt ett sätt, som en summa

$$u = u' + u''$$

där u' är en vektor i W och u'' är en vektor i W^\perp . Vektorn u' kallas projektionen av u på W och betecknas även $\text{proj}_W u$. Om $\{v_1, \dots, v_p\}$ är en ortogonal bas för W så beräknas vektorn u' med projektnsformeln

$$u' = \frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \dots + \frac{u \cdot v_p}{v_p \cdot v_p} v_p \text{ och } u'' = u - u'$$

Bevis.

Ex. Låt A vara som i tidigare exempel och $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Vi skall bestämma den ortogonala projektionen av y på $\text{Col}(A)$.

Sats 9. Satsen om bästa approximation. Låt W vara ett underrum i \mathbb{R}^n och u en godtycklig vektor i \mathbb{R}^n . Låt u' vara projektionen av u på W . Då är u' den punkt i W som ligger närmast u . Med andra ord gäller att

$$\|u - u'\| < \|u - v\|$$

för alla v i W med $v \neq u'$.

Ex.5. Bestäm avståndet från $y \in \mathbb{R}^3$ till planet $W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$, där

$$y = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Sats 10. Om $\{v_1, \dots, v_p\}$ är en ON-bas för ett underrum W i \mathbb{R}^n . Då är

$$\text{proj}_W y = (y \cdot v_1)v_1 + \dots + (y \cdot v_p)v_p$$

Om $U = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p]$, så gäller

$$\text{proj}_W y = UU^T y \text{ för alla } y \in \mathbb{R}^n$$

Ex.6.

Sats 6. En $m \times n$ -matris U har ortonormerade kolonner omm $U^T U = I$.

Def. En kvadratisk matris U kallas **ortogonal** om $U^{-1} = U^T$.

Sats 6'. En $n \times n$ -matris är ortogonal omm den har ortonormerade kolonner (\Leftrightarrow kolonner bildar en ON-bas i \mathbb{R}^n).

Sats 7. Låt U vara en $m \times n$ -matris med ortonormerade kolonner och låt x och y vara vektorer i \mathbb{R}^n . Då gäller:

- a. $\|Ux\| = \|x\|$
- b. $(Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
- c. $(Ux) \cdot (Uy) = 0$ omm $x \cdot y = 0$.

Satsen innebär att om en avbildningsmatris U har ortonormerade kolonner så bevaras både längd och vinklar mellan vektorer.

Def. Om A är en $m \times n$ -matris och $b \in \mathbb{R}^m$ så är en **minstakvadrat-lösning** till ekvationen $Ax = b$ en vektor $x' \in \mathbb{R}^n$ sådan att

$$\|Ax' - b\| \leq \|Ax - b\| \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Minstakvadrat felet är $\|Ax' - b\|$ då x' är minstakvadrat-lösningen. Ofta använder man istället *kvadratiska medelfelet* som är $\|Ax' - b\|/\sqrt{n}$, där n är anatalet ekvationer i systemet.

Sats 13. Minstakvadrat-lösningarna till ekvationen $Ax = b$ är samma som lösningarna till den (konsistenta) normaliserade ekvationen

$$A^T Ax = A^T b$$