LINJÄRT BEROENDET

Def. Låt $u_1, \ldots, u_p$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. De sägs vara **linjärt oberoende** omm vektorekvationen

$$x_1 u_1 + \ldots + x_p u_p = 0$$

endast har trivial lösning.

$u_1, \ldots, u_p$ sägs vara **linjärt beroende** omm vektorekvationen

$$x_1 u_1 + \ldots + x_p u_p = 0$$

har också en icke-trivial lösning.

Låt $A = [u_1 \ldots u_p]$. Alltså blir $u_1, \ldots, u_p$ linjärt oberoende omm ekvationen $Ax = 0$ endast har trivial lösning.

Sats 7. En mängd som består av två eller fler vektorer $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är linjärt beroende omm minst en (ej alla) av vektorerna är en linjärkombination av de övriga.

Sats 8. Varje mängd $\{v_1, \ldots, v_p\}$ av vektorer i $\mathbb{R}^n$, där $p > n$ är linjärt beroende.

Bevis. Låt $A = [v_1 \ldots v_p]$. Då A är $n \times p$-matris och $Ax = 0$ svarar systemet med n ekvationer och p obekanta. Om $p > n$ så finns det fler variabler än ekvationer och därmed finns fri variabler. Detta ger att $Ax = 0$ har icke-trivila lösningar och att $\{v_1, \ldots, v_p\}$ är linjärt beroende.

LINJÄRA AVBILDNINGAR

Def. En **funktion** eller **transformation** eller **avbildning** T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som till varje vektor x i $\mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $T(x)$ i $\mathbb{R}^m$. $\mathbb{R}^n$ kallas för definitionsmängd eller domän, $\mathbb{R}^m$ kallas codomän.

T kallas **linjär** om $T(u+v) = T(u) + T(v)$ och $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, för alla u, v i $\mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex.1. a. ”Nollavbildningen” $T(u) = 0$, $u \in \mathbb{R}^n$.

b. $T(u) = \alpha u$, $u \in \mathbb{R}^n$, α är en skalär.

c. Rotation i $\mathbb{R}^2$ φ radianer.

d. Låt A vara en $m \times n$-matris. Så ger varje vektor $x \in \mathbb{R}^n$ en vektor Ax i $\mathbb{R}^m$. Vi har således en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som ges av $T(x) = Ax$. T är en linjär avbildning, ty $A(u+v) = Au + Av$ och $A(\alpha u) = \alpha Au$, då u, v i $\mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sats 10. Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns en unik matris A sådan att $T(x) = Ax$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$. Om e_j är den j:te kolonnen i enhetsmatrisen I_n och $a_j = T(e_j)$ så är $A = [a_1 \ldots a_n]$.

Bevis. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ och $T(x) = T(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_n) = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = Ax$.

Ex.2. a. Nollavbildningen har matrisen 0.

b. Avbildningen i Ex.1b har standardmatrisen αI_n, där I_n är enhetsmatrisen.

c. För avbildningen i Ex.1c har vi $T(e_1) = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$ och $T(e_2) = -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2$ och standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Def. En avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas **surjektiv** eller **på** om varje vektor b i $\mathbb{R}^m$ är bild av minst en vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Värdemängden är hela $\mathbb{R}^n$.

Den kallas **injektiv** eller **entydig** om varje vektor b i $\mathbb{R}^m$ är en bild av högst en vektor x i $\mathbb{R}^n$ $(T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Sats 11. Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är T injektiv omm ekvationen $T(x) = 0$ endast har den triviala lösningen.

Mängden $\{x : T(x) = 0\}$ kallas **kärnan** till T eller **nollrummet** till T ($\ker(T)$ eller $Nul(T)$). Alltså: T är injektiv omm $\ker(T) = 0$.

Bevis. T är injektiv $\Rightarrow$ eftersom $T(0) = 0$ finns inga andra x som abildas på 0 dvs $T(x) = 0$ endast har den triviala lösningen $x = 0$.

Låt $\ker(T) = 0$. Om $T(x_1) = T(x_2)$ så $0 = T(x_1) - T(x_2) =$ (T är linjär) $= T(x_1 - x_2)$ och $x_1 - x_2 = 0$, dvs $x_1 = x_2$. Därför blir T injektiv.

Sats 12. Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt A vara standardmatrisen för T. Då gäller

a) T är surjektiv omm kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$.

b) T är injektiv omm kolonnerna i A är linjärt oberoende.

Bevis. a) Enligt Sats 4 (kap 1.4) har vi att kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$ omm ekvationen $Ax = b$ och därmed $T(x) = b$ har minst en lösning för varje $b \in \mathbb{R}^m$ vilket är ekvivalent med att T är surjektiv.

b) Det följer ur Sats 11 att T är injektiv omm ekvationen $T(x) = 0$ och därmed $Ax = 0$ har endast den triviala lösningen. Detta händer omm kolonnerna i A är linjärt oberoende.
