MATRISALGEBRA

Matrisoperationer.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{n,m}$$

(i,j)-position är positionen i rad i och kolonn j. a_{ij} (eller $(A)_{ij}$) är elementet på (i,j)-position.

$rad_i(A)$ är rad i hos matrisen A; $kol_j(A)$ är kolonn j hos A.

Om $m = n$ kallas A en **kvadratisk** matris. Om alla $a_{ij} = 0$ så är A $m \times n$-nollmatrisen (0_{mn}). Om $m = n$ och $a_{ii} = 1$ och $a_{ij} = 0$ då $i \neq j$ så kallas A **identitetsmatrisen** eller **enhetsmatrisen** (I_n).

Två matriser $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ är lika om de har samma storlek och $a_{ij} = b_{ij}$ för alla i, j.

Addition: Matriser av samma storlek kan adderas: additionen sker genom att elementen på samma position adderas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär: alla matris elementen multipliceras med skalären

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & \dots & ca_{nm} \end{bmatrix}.$$

För dessa operationer gäller de vanliga räknereglerna (Sats 1, sid. 108). Om vi tänker om matriser A, B som avbildningsmatriser (eller standardmatriser) till linjära avbildningar $T, S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ så motsvarar matrisaddition $A + B$ additionen av dessa linjära avbildningarna. Multiplikation av en matris med en skalär, cA motsvarar avbildningen $cT : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Matrismultiplikation: Om antalet kolonner i A är samma som antalet rader i B kan produkten AB bildas. Om A är $m \times n$ matris och $B = [b_1 \dots b_p]$ är $n \times p$ matris så blir AB $m \times p$ matris som definieras enligt

$$AB = [Ab_1 \dots Ab_p].$$

Om A och B är en avbildningsmatriser till $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och respektive $S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ så ges den sammansatta funktionen $T \circ S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ av $(T \circ S)(x) = T(S(x)) = A(Bx) = (AB)x$.

Rad-kolonn regel för beräkning av matrisprodukt.

$$(AB)_{ij} = rad_i(A) \cdot kol_j(B).$$

Räkneregler för matrisoperationer. Antag att A, B och C är matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:
a) $A(BC) = (AB)C$ (associativ lag för multiplikation);
b) $A(B + C) = AB + AC$ (vänsterdistributiv lag);
c) $(B + C)A = BA + CA$ (högerdistributiv lag);
d) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ för varje skalär r;
e) $IA = A = AI$.

Varning!
I. $AB \neq BA$ i allmämnhet;
II. $AB = AC \not\Rightarrow B = C$;
III. $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$.

Def. Med **transponatet** av $n \times m$-matris A menas $m \times n$ matrisen A^T vars kolonnvektorer är radvektorerna i A.

$$\text{Om } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \text{ så } A^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}.$$

Sats 3 (2.1). Låt A, B vara matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:
a) $(A^T)^T = A$;
b) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
c) $(rA)^T = rA^T$ för varje skalär r;
d) $(AB)^T = B^T A^T$ **Notera ordningen!**

INVERSEN

Def. En $n \times n$ matris A kallas inverterbar om det finns en $n \times n$-matris C sådan att

$$CA = I_n \text{ och } AC = I_n.$$

Matrisen C i så fall entydigt bestämd och kallas **inversen** till A. Betecknas A^{-1}.

Obs! Om A är inverterbar så gäller

- $AB = AC \Rightarrow B = C$;
- $AB = 0 \Rightarrow B = 0$.

Sats 4 (2.2) Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Om $ad - bc \neq 0$ är A invertebar med $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Om $ad - bc = 0$ är A inte invererbar. Talet $ad - bc$ kallas determinanten av A ($\det A$).

Sats 5 (2.2) Om en kvadratisk $n \times n$ matris A är inverterbar så har ekvationssystemet $Ax = b$ har entydig lösning för varje $b \in \mathbb{R}^n$. Lösningen ges av $x = A^{-1}b$.

Bevis. A är inverterbar $\Rightarrow$

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

Sats 6 (2.2)

- Om A är inverterbar så är A^{-1} och

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

- Om A och B inverterbara så är AB och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **Notera ordningen**;

- Om A är inverterbar så är A^T och

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$