INVERS (FORTSÄTTNING)

Elementära matriser

Med en elementär matris menas en matris E som "utför en elementär radoperation". Alltså om $A \sim A_1$ via en enda elementär radoperation och $EA = A_1$ så kallas E elementär.

Det finns tre typer av elementära matriser.

Typ 1 motsvarar att till en rad adderas en multipel av en annan rad:

Typ 2 motsvarar att två rader byter plats

Typ 3 motsvarar en rad multiplikation med en skalär$\neq 0$.

Alla dessa matriser är inverterbara!!!

Sats 7 (2.2) En $n \times n$ matris A är inveterbar omm A är radekvivalent med I_n. I så fall kommer varje följd av radoperationer som överför A till I_n också att överföra I_n till A^{-1}.

Bevis. Antag att A är inverterbar. Eftersom $Ax = b$ har en lösning för varje b (Sats 5 (2.2)) har A pivot element i varje rad (Sats 4 (1.4)). Eftersom A är kvadratisk blir reducerade trappstegsform av A identitetsmatrisen I_n. Antag nu att $A \sim I_n$. Eftersom varje radoperation svarar vänster multiplikation med en elementär matris får vi en följd av elementára matriser $E_1, \ldots, E_p$ sådana att

$$A \sim E_1 A \sim \ldots \sim E_p(E_{p-1} \ldots E_1 A) = I_n$$

dvs $E_p E_{p-1} \ldots E_1 A = I_n$.

Eftersom varje E_k är inverterbar,

$$E_1^{-1} \ldots E_p^{-1} E_p \ldots E_1 A = E_1^{-1} \ldots E_p^{-1} I_n$$

och $A = (E_p \ldots E_1)^{-1}$. Alltså, A är inverterbar med inversen

$$A^{-1} = ((E_p \ldots E_1)^{-1})^{-1} = E_p \ldots E_1 = E_p \ldots E_1 I_n.$$

Detta visar att följden $E_1, \ldots, E_p$ överför I_n på A^{-1} vilken är samma som överför A på I_n.

Denna sats motiverar följande

Metod för beräkning av A^{-1}.

Överför matrisen $[A|I]$ till reducerad trappstegsform. Om denna är $[I|B]$ så är $B = A^{-1}$. Om man inte får pivotelement i samtliga kolonner i A så är A inte inverterbar.

En annan motivering av metoden: då vi söker A^{-1} söker vi en kvadratisk matris X som uppfyller $AX = I$. Om $X = [x_1 \dots x_n]$, x_i är kolonnvektorer då

$$Ax_1 = e_1, \dots Ax_n = e_n.$$

Vi kan lösa dessa ekvationer med totalmtrisen $[A|e_i]$ separat eller alla samtidigt med matrisen $[A|I]$.

Sats 8 (2.3) (om inverterbara matrisers egenskaper). Låt A vara en $n \times n$-matris. Då är följande påstående ekvivalenta:

a. A är inverterbar.
b. A är radekvivalent med identitetsmatrisen I_n.
c. A har n pivot positioner
d. Ekvationen $Ax = 0$ har endast den triviala lösningen.
e. A:s kolonner är linjärt oberoende.
f. Den linjära avbildningen $x \mapsto Ax$ är injektiv.
g. Ekvationen $Ax = b$ har minst en lösning för varje $b \in \mathbb{R}^n$.
h. A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^n$.
i. Den linjära avbildningen $x \mapsto Ax$ avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.
j. Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.
k. Det finns en $n \times n$ matris D sådan att $AD = I$.
l. A^T är inverterbar.

Om A och B är kvadratiska och $AB = I$ så är både A och B inverterbara med $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$.

Def. En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en funktion $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så att

$$S(T(x)) = x \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$T(S(x)) = x \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Funktionen S kallas då inversen till T och betecknas T^{-1}. En funktion är inverterbar omm den är både injektiv och surjektiv. Den kallas då bijektiv.

Sats 9 (2.3) Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning och låt A vara T:s avbildningsmatris. Då är T inverterbar omm A är inverterbar. I detta fall är den linjära avbildningen S som ges av $S(x) = A^{-1}x$ den inversa avbildningen till T.

Bevis. Antag att T är inverterbar. Då, enligt (2) är T surjektiv, ty för $b \in \mathbb{R}^m$ kan man ta $x = S(b)$ och få $T(x) = T(S(b)) = b$. Enligt Sats 8 (i) är A inverterbar.

Omvänt, om A är inverterbar så låter vi $S(x) = A^{-1}x$. Då är S en linjär avbildning och

$$T(S(x)) = A(A^{-1}(x)) = x \text{ och } S(T(x)) = A^{-1}(Ax) = x$$

för alla $x \in \mathbb{R}^n$ och därmed blir T inverterbar.

Inveresen S är unik, ty om S_1 är en annan funktion som uppfyller (1) och (2) så $S(T(x)) = x = S_1(T(x))$ för alla x. Eftersom T är surjektiv, $\{T(x) : x \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n$ och vi får att $S_1(b) = S(b)$ för alla $b \in \mathbb{R}^n$.
